Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

MODELO 2016

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

28 de abril de 2021

2016

Modelo 2016

Modelo 2016
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + 4y + z = 3 \\ kx + 2y - z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) Discutirlo según los valores de k.

b) Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) Resolverlo en el caso $k = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \implies k = \{1/2, 1\}$$

- Si $k \neq \{1/2, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $k = 1/2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sist. Incompatible (No tiene solución)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incog. $= 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $k = 2$ por el método de Gauss. Sabiendo que se trata de un S.C.D. También podríamos haberlo resuelto por el método de Cramer, con la ventaja de que ya conocemos $|A| = -4k^2 + 6k - 2 = -6$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -3z = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y - 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ z = -1/3 \\ y = 1/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 1$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolveremos tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado en la discusión.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ 2F_2 - F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow 2x + 4\lambda - 1 = 3 \\ \Rightarrow -3z = -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{ll} x = 2 - 2\lambda & \\ y = \lambda & , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 & \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - kF_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1-2k & 1 \\ 0 & 2-2k & -1-k^2 & 3-k \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 2-2k & -1-k^2 & 3-k \\ 0 & 0 & 1-2k & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1-2k=0 & \Rightarrow \boxed{k = 1/2} \\ 2-2k=0 & \Rightarrow \boxed{k=1} \end{cases}$$

- Si $k \neq \{1/2, 1\} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \square & 1 \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 \end{array}\right) \implies$ Sist. Compatible Determinado

- Si $k = 1/2 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \implies$ Sistema Incompatible

- Si $k = 1 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} 2F_3 - F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Sustituimos el valor $k = 2$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ \Rightarrow -2y - 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \\ \Rightarrow -3z = 1 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $k = 1$. Como se trata de un S.C.I. resolveremos tan solo las ecuaciones que se han mantenido tras hacer el método de Gauss en la discusión.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2\lambda - 1 = 1 \\ \Rightarrow -2z = 2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$$

se pide:

a) *Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

b) *Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.*

c) *El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.*

d) *El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) $f(x) = 4x - x^2 = x \cdot (4 - x) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo $f'(x)$	-	$+$	-
$f(x)$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$

La función $f(x)$ es *decreciente* en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y *creciente* en $(0, 4)$.

b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en $(0, 0)$ y un *máximo relativo* en $(4, {}^{32}/_{3})$

c) $m(x) = f'(x) = 4x - x^2$
$m'(x) = 4 - 2x = 0 \implies x = 2$
$m''(x) = -2 \implies m''(2) < 0 \overset{(\cap)}{\implies}$ Pendiente Máxima en $(2, m(2)) = (2, 4)$

d) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$y = 0 \implies 2x^2 - \frac{x^3}{3} = x^2 \cdot \left(2 - \frac{x}{3}\right) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$V = \int_0^6 \pi \cdot f^2(x)\, dx = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \int_0^6 \left(4x^4 - \frac{4x^5}{3} + \frac{x^6}{9}\right) dx$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^6}{18} + \frac{x^7}{63}\right)\Bigg]_0^6 = \frac{10368\pi}{35}\ u^3$$

Ejercicio 3 (3 *puntos*)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ *y la recta* $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1,0,1)$.

b) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2,1,1)$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,-3,-1) \end{cases}$$

a) $r \in \pi_1 \quad \& \quad P \in \pi_1$

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} R(1,0,0) \\ \vec{u} = \vec{d_r} = (1,-3,-1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{RP} = (0,0,1) \end{cases} \implies \pi_1 \equiv \left[\overrightarrow{RX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 3x + y - 3 = 0}$$

b) $s \perp \pi \quad \& \quad Q \in s$

$$s \equiv \begin{cases} Q(2,1,1) \\ \vec{d_s} = \vec{n_\pi} = (1,2,-1) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 4 (3 *puntos*)

Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,1)$, se pide:

a) Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P,S) = 2d(Q,S)$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción A)

Solución.

a) Sea $X(x,y,z) \implies \overrightarrow{PX} = (x-1, y-1, z-3) \quad \& \quad \overrightarrow{QX} = (x, y-1, z-1)$

$$d(P,X) = d(Q,X) \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - \cancel{2y} + 1 + \cancel{z^2} - 6z + 9 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2y} + 1 + \cancel{z^2} - 2z + 1$$

$$\implies \boxed{\pi \equiv 2x + 4z - 9 = 0}$$

El lugar geométrico pedido es un plano perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por el punto medio $M_{\overline{PQ}}$, llamado *plano mediador*.

b) Sea la recta s que pasa por los puntos P y Q.

$$s \equiv \begin{cases} Q(0,1,1) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{PQ} = (-1,0,-2) \end{cases} \implies s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \implies S(-\lambda, 1, 1-2\lambda)$$

$$d(P,S) = 2d(Q,S) \Rightarrow \sqrt{(-1-\lambda)^2 + 0^2 + (-2-2\lambda)^2} = 2 \cdot \sqrt{(-\lambda)^2 + 0^2 + (-2\lambda)^2}$$

$$1 + 2\lambda + \lambda^2 + 4 + 8\lambda + 4\lambda^2 = 4 \cdot \left(\lambda^2 + 4\lambda^2\right)$$

$$15\lambda^2 - 10\lambda - 5 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \implies S_1(-1,1,-1) \\ \lambda = -\frac{1}{3} \implies S_2(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}) \end{cases}$$

2016 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0 \quad \& \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) *Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.*

b) *Hallar la distancia del punto $P(3, -1, 2)$ al plano π_1.*

c) *Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) Para que el vector $\vec{v}$ pedido sea paralelo a ambos planos, ha de ser perpendicular a los vectores normales a los planos π_1 y π_2, luego habrá de llevar la dirección del producto vectorial de $\vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{u} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, -8, -10) \approx (3, 4, 5) \implies |\vec{u}| = 5\sqrt{2}$$

El vector $\vec{v}$ será proporcional a $\vec{u}$ y tendrá módulo 1.

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} \implies |\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}| = |\lambda| \cdot 5\sqrt{2} = 1 \implies |\lambda| = \frac{1}{5\sqrt{2}} \implies \lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \& \quad \vec{v}_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

b) $$d(P, \pi_1) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{|-12|}{5\sqrt{2}} = \frac{12}{5\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \; u$$

c) $$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1|}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|-10|}{5\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

se pide:

a) *Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada $f'(x)$ donde sea posible.*

b) *Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.*

c) *Calcular $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

Siempre que tengamos un valor absoluto en una función hay que reescribir la misma como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a)
- Continuidad de $f(x)$
  - Si $x < 0,\ f(x) = -x$, que es continua en $\mathbb{R}$, luego continua en $x < 0$.
  - Si $0 < x < 1,\ f(x) = x$, que es continua en $\mathbb{R}$, luego continua en $0 < x < 1$.
  - Si $x > 1,\ f(x) = x \cdot e^{1-x}$, que es continua en $\mathbb{R}$, luego continua en $x > 0$.
  - Si $x = 0$
    - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x) = 0$
    - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
    - $f(0) = 0$

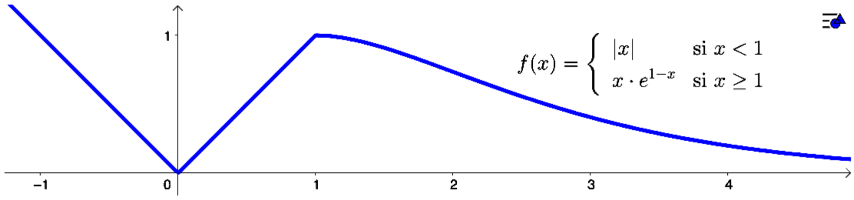
    Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$
  - Si $x = 1$
    - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$
    - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x \cdot e^{1-x} = 1$
    - $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$

    Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

  Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
- Derivabilidad de $f(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ (1-x) \cdot e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} f(x) \text{ no es derivable} \\ \text{en } x = 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} f(x) \text{ no es derivable} \\ \text{en } x = 1 \end{array}$$



b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx = \int_{0}^{1} x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} x \cdot e^{1-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{1-x}\,dx & \Rightarrow v = -e^{1-x} \end{array} \right\}$

$$= -x \cdot e^{1-x}\Big]_1^2 + \int_1^2 e^{1-x}\,dx = -xe^{1-x} - e^{1-x}\Big]_1^2 = (-1-x)\cdot e^{1-x}\Big]_1^2$$

$$= -3e^{-1} + 2 = 2 - \frac{3}{e}$$

Ejercicio 3 (3 *puntos*)

Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \& \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales $(M - \lambda I) \cdot X = O$

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

a) $|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \left[(1-\lambda)^2 - 4\right]\cdot(3-\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)\cdot(3-\lambda)$

$$= (\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial para $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left[F_2 - F_1 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + 2\lambda = 0 \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z = 0 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \quad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 4 (3 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B \cdot \left(A^\top + 3I\right)$, donde $A^\top$ denota la matriz transpuesta de A.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2016 - Opción B)

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \quad \& \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \& \quad \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AX + 3B = B \cdot \left(A^\top + 3I\right) \implies AX = BA^\top + 3B - 3B$$

$$AX = BA^\top \implies \underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}BA^\top \implies \boxed{X = A^{-1}BA^\top}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$