Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JUNIO 2016
(Ordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

18 de abril de 2021

Junio 2016
Opción A

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ *y calcular* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, *en* $x = 2$.

c) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a)
- Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$, que es continua en $\{1-x > 0\} - \{1\} = \{x < 1\}$, luego es continua en $x < 0$
- Si $x > 0$, $f(x) = xe^{-x}$, que es continua en $\mathbb{R}$, luego continua en $x > 0$.
- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \dfrac{0}{1} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} xe^{-x} = 0$
  - $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Por lo tanto $f(x)$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0$$

b) $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(2) = \dfrac{2}{e^2}$

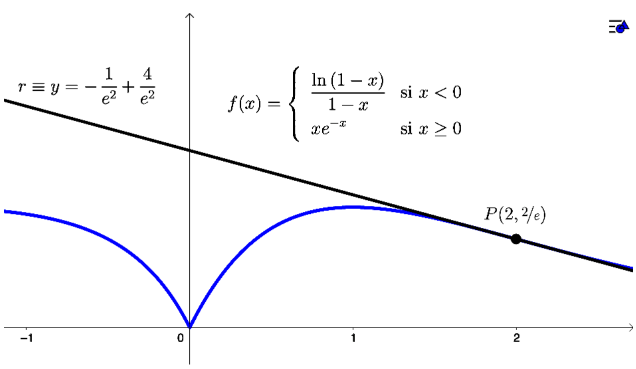
$f_2'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$

$m_r = f'(x_0) = f'(2) = -\dfrac{1}{e^2}$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2} \cdot (x-2)$

$r \equiv y = -\dfrac{1}{e^2}x + \dfrac{4}{e^2}$



c) $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx \overset{\odot}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln^2(1-x)\Big]_{-1}^{0} + -(1+x)\cdot e^{-x}\Big]_{0}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \ln^2 2 - \frac{2}{e} + 1$$

$$\odot \int \frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(1-x)}_{u}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln^2(1-x) + C$$

$$\odot \int xe^{-x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx & \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(1-x)\cdot e^{-x} + C$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

a) *Despeje X en la ecuación matricial $X\cdot(CD)^{-1} = A + X\cdot(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.*

b) *Para* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *determine la matriz Y tal que $YB = A$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a)

$$X \cdot \underbrace{(CD)^{-1}}_{D^{-1}C^{-1}} = A + X\cdot\left(D^{-1}C^{-1} - B\right)$$

$$\cancel{XD^{-1}C^{-1}} = A + \cancel{XD^{-1}C^{-1}} - XB$$

$$A - XB = 0 \implies A = XB$$

$$AB^{-1} = X\underbrace{BB^{-1}}_{I} \implies \boxed{X = AB^{-1}}$$

b) $YB = A \implies Y\underbrace{BB^{-1}}_{I} = AB^{-1} \implies Y = AB^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |B| = 2 \quad \& \quad \text{Adj}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \text{Adj}B^{\top} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = AB^{-1} \overset{\circledast}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\circledast$ Nota: Cuando necesitamos operar con la matriz inversa es mucho mejor hacerlo antes de multiplicar todos los elementos de la matriz por $1/2$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

a) Para que ambos planos sean paralelos $\vec{n}_{\pi_1} \parallel \vec{n}_{\pi_2}$ y $\pi_1 \neq \pi_2$

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \implies \begin{cases} a^2 = 1 \implies \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \\ \quad \& \\ -a = 1 \implies a = -1 \end{cases} \implies \boxed{a = -1}$$

b) $\pi_1 \perp \pi_2 \implies \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \implies \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \implies a + a - 1 = 0 \implies \boxed{a = 1/2}$

c) Sea π_3 el tercero de los planos: $\pi_3 \equiv x - y = 0 \implies \vec{n}_{\pi_3} = (1, -1, 0)$.
Hallamos el vector director de la recta $r \equiv \vec{n}_{\pi_1} \cap \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{d_r} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (1 + a, -a - 1, a^2 - 1) = (a + 1) \cdot (1, -1, a - 1)$$

$$r \perp \pi_3 \implies \vec{d_r} \parallel \vec{n}_{\pi_3} \implies (a + 1) \cdot (1, -1, a - 1) = \lambda(1, -1, 0) \implies a + 1 = 0 \implies a = -1$$

Pero si $a = -1 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$ y por tanto no habría recta de intersección entre ambos. Por tanto no hay ningún valor $a \in \mathbb{R}$ que cumpla las condiciones del enunciado.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$, $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción A)

Solución.

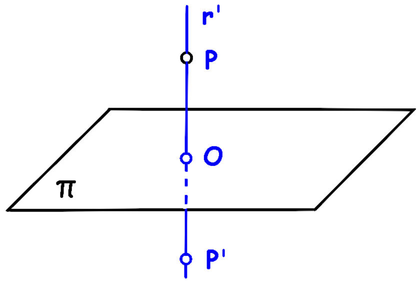
a) El plano π que pasa por A, B y C será:

$$A(0, 2, -1) \quad \& \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -5, 1) \quad \& \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2)$$

$$\left[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} x & y - 2 & z + 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9x + 9 \cdot (z + 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z - 1 = 0$$

- Hallamos la recta $r \perp \pi$ que pasa por P.

$$r \equiv \begin{cases} P(2,1,-1) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (1,0,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



- $r \cap \pi \to O$

$$2+\lambda-(-1-\lambda)-1 = 0 \implies \lambda = -1 \implies O(1,1,0)$$

- $O = M_{\overline{PP'}} = \dfrac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2O - P$

$$\boxed{P'(0,1,1)}$$

Junio 2016
Opción B

Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$$

se pide

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = m^2 - 4 = 0 \implies m = \{-2, 2\}$$

- Si $m \neq \{-2, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m=2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{ran}(A^*)=2$

  $\operatorname{ran}(A)=2=\operatorname{ran}(A^*) \neq$ nº incóg. $=3 \xrightarrow{Rouche}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m=0$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-3F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x-7+2\cdot\frac{7}{2}=-2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y-6\cdot\frac{7}{2}=7 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 2z=7 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=7 \\ z=\frac{7}{2} \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \\ \\ \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2-5F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 4 & m-6 & 7 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ (m+6)\cdot F_3-4F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & m^2-4 & 7m-14 \end{array}\right) \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=2 \end{cases}$$

- Si $m \neq \{-2,2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO

- Si $m=-2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE

- Si $m=2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & m+6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $m = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -8 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \Rightarrow x - 7 + 2 \cdot \frac{7}{2} = -2 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6y - 8 \cdot \frac{7}{2} = 14 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -4z = -14 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -2 \\ y = 7 \\ z = \frac{7}{2} \end{array}}$$

Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es paralelogramo.

b) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

a) Sean los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = (0,1,1) \quad \& \quad \overrightarrow{AC} = (2,-1,-1) \quad \& \quad \overrightarrow{AD} = (2,-2,-2)$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{los vectores } A, B, C \text{ y } D \text{ son coplanarios}$$

Para demostrar que un cuadrilátero $ABCD$ es paralelogramo tenemos dos opciones:

- Que sus lados sean congruentes dos a dos $\Longrightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \wedge \overline{AD} = \overline{BC}$
- Que sus diagonales se corten en el punto medio. Optaremos por este método para lo cual vamos a hallar el punto medio de cada una de las diagonales y comprobar si es el mismo:

$$M_{\overline{AC}} = \frac{A+C}{2} = (1, 9/2, 5/2) \qquad \& \qquad M_{\overline{BD}} = \frac{B+D}{2} = (1, 9/2, 5/2)$$

Por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

b) $S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}| = |(0.2, -2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u^2$

c) Nos piden la recta r perpendicular al plano π formado por los puntos A, B, C y D que pasa por el punto medio del paralelogramo.

$$\pi \equiv \left[\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi \equiv y - z - 2 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} M_{\overline{AC}} = (1, 9/2, 5/2) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_\pi = (0, 1, -1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 9/2 + \lambda \\ z = 5/2 - \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

a) *Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.*

b) *Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y que además verifica:*

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5, \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)

Solución.

a) $f''(x) = \int f'''(x)\,dx = \int 12\,dx = 12x + C \xrightarrow{f''(1)=4} C = -8 \implies f''(x) = 12x - 8$

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = 6x^2 - 8x + C \xrightarrow{f'(1)=1} C = 3 \implies f'(x) = 6x^2 - 8x + 3$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = 2x^3 - 4x^2 + 3x + C \xrightarrow{f(1)=3} C = 2 \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$

b) $g''(x) = 6 \implies g'(x) = \int g''(x)\,dx = 6x + C$

$g(x) = \int g'(x)\,dx = 3x^2 + Cx + K$

$\int_0^1 g(x)\,dx = 5 \implies \left. x^3 + \frac{C}{2}x^2 + Kx \right]_0^1 = 1 + \frac{C}{2} + K = 5 \implies C + 2K = 8$

$\int_0^2 g(x)\,dx = 14 \implies \left. x^3 + \frac{C}{2}x^2 + Kx \right]_0^2 = 8 + 2C + 2K = 14 \implies C + K = 3$

$$\begin{cases} C + 2K = 8 \\ C + K = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} C = -2 \\ K = 5 \end{cases} \implies \boxed{g(x) = 3x^2 - 2x + 5}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

> *Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de la función:* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \cdot \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$, *donde* ln *denota el logaritmo neperiano.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2016 - Opción B)*

Solución.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ |x \cdot \ln x| & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ -x \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -1 - \ln x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a)
- Continuidad en $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\ln x}{1/x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

    $\overset{L'Hop}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
  - $f(0) = 0$

  Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ la función $f(x)$ es *continua* en $x = 0$.
- Continuidad en $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x \ln x) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0$
  - $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$

  Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ la función $f(x)$ es *continua* en $x = 1$.
- Derivabilidad en $x = 0$ & $x = 1$

- Continuidad en $x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 1 - \ln 0 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es} \\ \text{derivable} \\ \text{en } x = 0 \end{array}$$

- Continuidad en $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -1 - \ln 1 = -1 \\ f'(1^+) = 1 + \ln 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es} \\ \text{derivable} \\ \text{en } x = 1 \end{array}$$

Por lo tanto la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.