Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos

EVAU MODELO 2021

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

2 de octubre de 2020

Modelo 2021
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a, b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b + ac & 2c & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A - B \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b + ac & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2a = a - 1 & \Rightarrow \quad a = -1 \\ 2c = c - 1 & \Rightarrow \quad c = -1 \\ 2b + ac = b - 1 & \Rightarrow \quad b = -2 \end{cases}$$

b) Para $a = b = c = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)^{\top} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la infegral $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a)
- Extremo relativo en $x = -3 \Longrightarrow f'(-3) = 0$
  $f'(x) = 2ax + b \Longrightarrow f'(-3) = -6a + b = 0 \Longrightarrow b = 6a$
- $r \equiv y = 6x + 8$ es la recta tangente en $x_0 = 0$

  $y_0 = 8 = f(x_0) = f(0) = c \Longrightarrow \boxed{c = 8}$

  $f'(0) = 6 \Longrightarrow \boxed{b = 6} \Longrightarrow b = 6a \Longrightarrow \boxed{a = 1}$

Y por tanto:

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}\,dx = \int_1^e 2x\,dx + \int_1^e dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$= x^2 + x + \ln x\Big]_1^e = \left(e^2 + e + \cancelto{1}{\ln e}\right) - \left(1 + 1 + \cancelto{0}{\ln 1}\right) = e^2 + e - 1$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $x^2 = 0 \implies x = 0$, luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

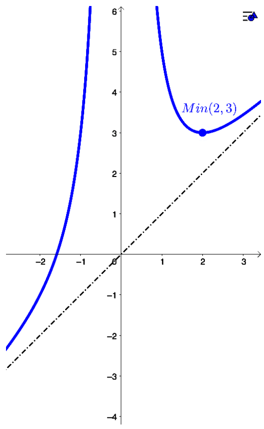
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3+4}{x^2}$$

- `A. Vertical` Analizamos los puntos que no pertenecen al dominio.
  - $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$
- `A. Horizontal` $y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists$ A.H.
- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{\cancel{x^3} + 4 - \cancel{x^3}}{x^2}\right] = 0$$

Luego la función $f(x)$ tiene una A. Oblícua en $y = x$.



b) Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4}$$

$$= \frac{x^4 - 8x}{x^4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ y *decreciente* en $(0, 2)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(2, 3)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un mercado agropecuario el 70 % de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30 % de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.

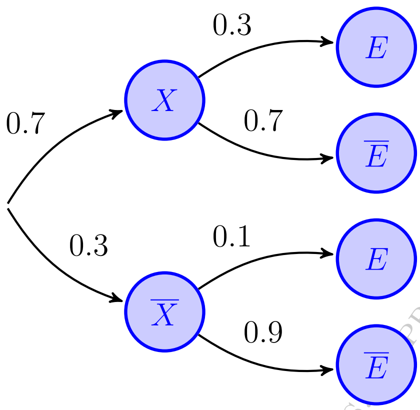
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

Sean los siguientes sucesos:

$$X \equiv \text{"La verdura es de proximidad"}$$
$$E \equiv \text{"La verdura es ecológica"}$$



a) $P(\overline{E})$

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= P(X \cap \overline{E}) + P(\overline{X} \cap \overline{E}) \\ &= P(X) \cdot P(\overline{E} \mid X) + P(\overline{X}) \cdot P(\overline{E} \mid \overline{X}) \\ &= 0.7 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.76 \end{aligned}$$

b) $P(X \cup E)$

$$\begin{aligned} P(X \cup E) &= P(X) + P(E) - P(X \cap E) \\ &= P(X) + 1 - P(\overline{E}) - P(X) \cdot P(E \mid X) \\ &= 0.7 + 1 - 0.76 - 0.7 \cdot 0.3 = 0.73 \end{aligned}$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción A)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.1) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 30$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.25 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.38$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (25.62; 34.38)$$

b) $X : \mathcal{N}(28, 10) \xrightarrow{n=10} \overline{X} : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = 3.16\right)$

$$P\left(28 \leq \overline{X} \leq 30\right) = P\left(\frac{28 - 28}{3.16} \leq Z \leq \frac{30 - 28}{3.16}\right) = P(0 \leq Z \leq 0.63)$$
$$= P(Z \leq 0.63) - P(Z \leq 0) = 0.7357 - 0.5 = 0.2357$$

2021 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factble, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas`

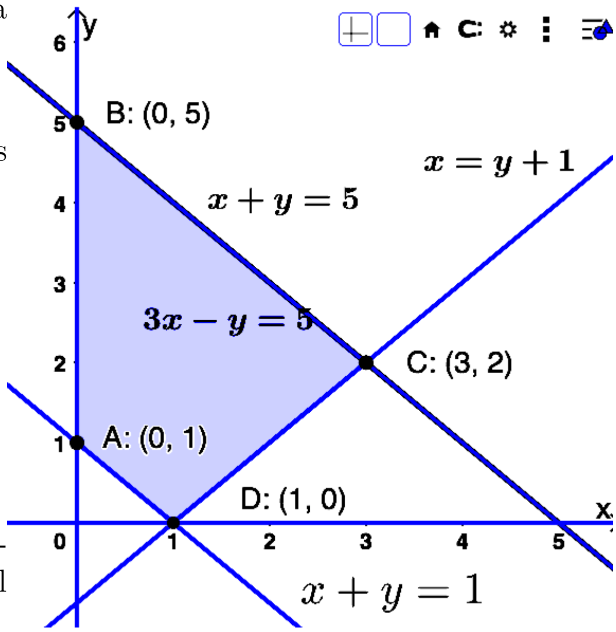
$$x \equiv \text{Hectáreas dedicadas al cultivo de trigo}$$
$$y \equiv \text{Hectáreas dedicadas al cultivo de cebada}$$

- `Región Factible` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} ① \; x + y \leq 5 & \rightarrow (0,5) \quad \& \quad (5,0) \\ ② \; x + y \geq 1 & \rightarrow (0,1) \quad \& \quad (1,0) \\ ③ \; x \leq y + 1 & \rightarrow (5,4) \quad \& \quad (1,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Función objetivo` $f(x,y) = 200x + 60y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	1	60
B	0	5	300
C	3	2	720
D	1	0	200

Por tanto el *beneficio máximo* es de 720 euros y se produce destinando 3 hectáreas al cultivo de trigo y 2 al de cebada.

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z &= 2a-1 \\ 2x+y+az &= 1 \\ x+ay+z &= 1 \end{cases}$$

a) *Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.*

b) *Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -a^2+3a-2 = 0 \implies a = \{1,2\}$$

- Si $a \neq \{1,2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incog.} = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$$

$$\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche} \text{SIST. INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rr} \Rightarrow & x - 2 - 1/2 = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -(-2) - 2z = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -y = 2 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

MÉTODO DE GAUSS

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -4a+3 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-2a \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 0 & a-2 & -1 & -4a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & 2-2a \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1, 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \square \\ -1 & \square & -1 & \square \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPAT. DETERMINADO
- Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. INDETERMINADO
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. INCOMPATIBLE (Depende dónde despejes $z = -1$ o $z = 5$)

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{rr} \Rightarrow & x - 2 - 1/2 = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -2z - (-2) = 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -y = 2 \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = -2 \\ x = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \dfrac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a) *Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.*

b) *Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $x^2 - 9 = 0 \implies x = \{-3, 3\}$, pero $-3 < 0 \implies \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$
Para que $f(x)$ sea derivable ha de ser continua.

- Si $x = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + ax - \dfrac{1}{9} \right) = -\dfrac{1}{9}$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2-9} = -\dfrac{1}{9}$
  - $f(0) = -\dfrac{1}{9}$

Luego $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Veamos la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & , \text{ si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 9 - 2x \cdot (x+1)}{(x^2-9)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x + a) = a$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2 - 2x - 9}{(x^2-9)^2} = -\dfrac{9}{81} = -\dfrac{1}{9}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, y por tanto en todo su dominio, se sigue que $a = -\dfrac{1}{9}$.

b) Para $a = 0$ la función será:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{9} & , \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

- `A. Vertical` Analizamos los puntos que no pertenecen a $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
  - $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+1}{x^2-9} = \left[\dfrac{4}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}=\left[\dfrac{9}{0}\right]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\left[\dfrac{9}{0^-}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\left[\dfrac{9}{0^+}\right]=+\infty\end{cases}$

- `A. Horizontal`
  $y=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2-\dfrac{1}{9}\right)=+\infty\Rightarrow$ Rama parabólica
  $y=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x^2-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0\Rightarrow$ A.H. en $y=0$
- `A. Oblicua` No tiene asíntotas oblícuas.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(C)=0.4$, $P(D)=0.6$ y $P(C\cup D)=0.8$ Calcule:

a) $P(C\mid D)$.

b) $P\left(\overline{C\cap D}\mid C\right)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

Del enunciado tenemos:

$$P(C)=0.4 \quad \& \quad P(D)=0.6 \quad \& \quad P(C\cup D)=0.8$$

a) $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$

$\Longrightarrow\ P(C\cap D)=P(C)+P(D)-P(C\cup D)=0.4+0.6-0.8=0.2$

$P(C\mid D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0.2}{0.6}=0.33$

b) $P\left(\overline{C\cap D}\mid C\right)=\dfrac{P\left(\overline{C\cap D}\cap C\right)}{P(C)}=\dfrac{P\left(\left(\overline{C}\cup\overline{D}\right)\cap C\right)}{P(C)}=\dfrac{P\left(\cancelto{\emptyset}{\overline{C}\cap C}\cup\overline{D}\cap C\right)}{P(C)}$

$=\dfrac{P\left(\overline{D}\cap C\right)}{P(C)}=\dfrac{P(C)-P(C\cap D)}{P(C)}=\dfrac{0.4-0.2}{0.4}=0.5$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar un muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2021 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 300) \quad \& \quad n =? \quad \& \quad E < 100 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} < 100 \implies n > \left(1.96 \cdot \frac{300}{100}\right)^2 = 34.57 \implies \boxed{n = 35}$$

b) $X : \mathcal{N}(3000, 300) \xrightarrow{n=50} \overline{X} : \mathcal{N}\left(3000, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{300}{\sqrt{50}} = 42.43\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 2700\right) = P\left(Z \geq \frac{2700-3000}{42.43}\right) = P(Z \geq -7.07) = P(Z \leq 7.07) \simeq 1$$