Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

SEPTIEMBRE 2020
(Extraordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

17 de septiembre de 2020

2020

Septiembre 2020 (Extrardinario)

2020 Septiembre (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:

a) *La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.*

b) *Las tres filas de A son linealmente independientes.*

c) *A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.*

d) *A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.*

e) *A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

La terdera fila ha de ser del tipo:

$$a \cdot (1,1,1,1) + b \cdot (1,2,3,4),\ \ a, b \in \mathbb{R},\ \ a,\ \ b \neq 0$$

Por tanto tomando por ejemplo $a = b = 1$, la tercera fila podría ser:

$$(1,1,1,1) + (1,2,3,4) = (2,3,4,5) \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Las tres filas de A son linealmente independientes.

La mejor forma de conseguir una fila linealmente independiente es elegir una cualquiera con un grado de libertad como por ejemplo $(1, 1, 1, \lambda)$ y obligar a $\text{ran}(A) = 3$. Para ello obligamos a que haya un menor de orden 3 distinto de cero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 \neq 0 \implies \lambda \neq 1$$

Tomando $\lambda = 2$ tendríamos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

Sea por tanto A^* la matriz buscada. Para que el sistema sea compatible determinado

$$\text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\text{o} \text{ incóg.} = 3$$

Por lo que podemos elegir como A^* la matriz del apartado *b)* ya que $\text{ran}(A^*) = 3$ y el menor de orden 3 correspondiente a A es distinto de cero y por tanto $\text{ran}(A) = 3$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

Sea de nuevo A^* la matriz buscada. Para que el sistema sea compatible indeterminado

$$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\text{o} \text{ incóg.} = 3$$

Pero teniendo en cuenta que las dos filas que nos han dado son linealmente independientes ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y que por tanto $\text{ran}(A) = 2$, tendremos que obtener una matriz ampliada con una tercera fila linealmente dependiente de las otras dos, de manera que $\text{ran}(A^*) = 2$, por lo que nos vale la del apartado *a)*.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

De nuevo sea A^* la matriz buscada. Para que el sistema sea incompatible

$$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3$$

Cogeremos por tanto la matriz del apartado d) y modificaremos el último valor ($a_{3,4}$)

$$A^* = \text{ran}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2 \qquad \& \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & si\ x < 1,\ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) Estudiar sus asíntotas.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) $f(0) = \dfrac{0-1}{0^2-1} = 1$

$(f \circ f)(0) = f\big(f(0)\big) = f(1) = \dfrac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

b) CONTINUIDAD en $x = 1$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{4x} = \dfrac{1}{2}$
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$

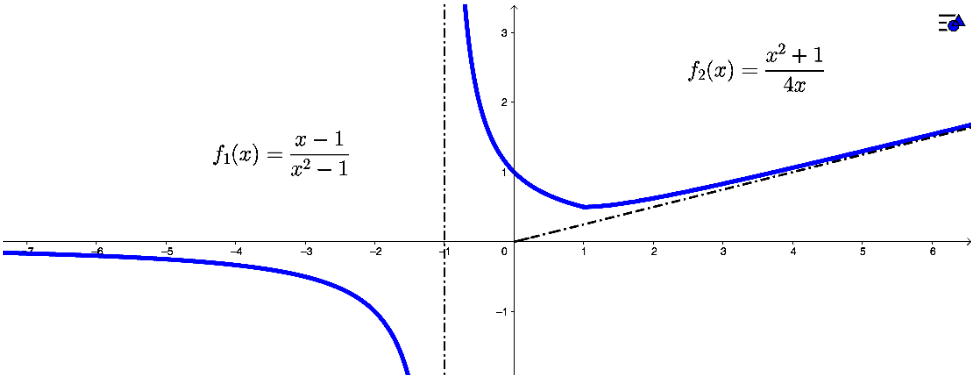
Luego como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 1$.
DERIVABILIDAD en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 1,\ x \neq -1 \\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} -\dfrac{1}{(x+1)^2} = -\dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{4x^2} = 0$

Luego como $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Para establecer si en $x = 1$ la función $f(x)$ tiene un extremo relativo tenemos que estudiar que pasa con las funciones a ambos lados de ese valor:



- $f_1(x)$ es continua en el intervalo $(-1, 1)$ y monótona decreciente ya que $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$, por lo que alcanza en $x = 1$ un mínimo en dicho intervalo.
- $f_2(x)$ es continua en en $(1, +\infty)$ y monótona creciente pues $f_2'(x) = \dfrac{x^2-1}{4x^2} > 0$, por lo que tiene un mínimo en dicho intervalo.
- Y, tal y como se ha estudiado, $f(x)$ es continua en ese punto, podemos afirmar que la función tíene un mínimo relativo en $x = 1$.

c)
- `A. Verticales`
  Las asíntotas verticales de $f_1(x)$ podrían estar en $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Mientras que las de $f_2(x)$ habría que buscarlas en $4x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin Dom(f_2)$

  - $$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \left[\dfrac{-2}{0^+}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left[\dfrac{-2}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$
  - $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \implies \nexists \text{A. V.}$$

- `A. Horizontal`

  - $$y = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0 \Rightarrow \text{A.H. en } y = 0$$
  - $$y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists \text{ A.H.}$$

- `A. Oblicua` Será una recta de la forma: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x\cdot 4x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} (f_2(x) - mx) = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2+1}{4x} - \frac{1}{4}x\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{4x}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

Luego la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = \dfrac{1}{4}x$ cuando $x \to +\infty$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) *Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.*

b) *Calcular el punto simétrico de P respecto de r.*

c) *Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo $\overset{\triangle}{ABP}$ sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

a) Definimos la recta como $r \equiv \begin{cases} R(2,0,-1) \\ \vec{d_r} = (-1,1,0) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(3,3,0) \\ \vec{u}_\pi = \vec{d_r} = (-1,1,0) \\ \vec{v}_\pi = \overrightarrow{RP} = (1,3,1) \end{cases} \quad \pi \equiv \left[\overrightarrow{PX}, \vec{u}_\pi, \vec{v}_\pi\right] = 0 \implies \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)+(y-3)-4z = 0 \implies \boxed{\pi \equiv x+y-4z-6=0}$$

b) Hallamos el plano β perpendicular a r y que pasa por P.

$$\beta \equiv \begin{cases} P(3,3,0) \\ \vec{n}_\beta = \vec{d_r} = (-1,1,0) \end{cases} \implies -x+y+D = 0 \xRightarrow{P\in\beta} -3+3+D=0 \implies D=0$$

$$\beta \equiv -x+y=0$$

$O = r \cap \beta \xrightarrow{O(2-\lambda,\lambda,1)} -(2-\lambda)+\lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies O(1,1,-1)$
De esta forma O será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, siendo P' el simétrico de P respecto de r.

$$O = M_{\overline{PP'}} = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow P' = 2O-P = 2(1,1,-1)-(3,3,0) \implies \boxed{P'(-1,-1,-2)}$$

c) Sean los puntos de la recta $r: \begin{cases} A(2-\lambda,\lambda,-1) \\ B(2-\mu,\mu,-1) \end{cases}$, y sea $P(3,3,0)$.

- Angulo recto en $A \implies \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \implies \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$.

$$(\lambda-\mu, \mu-\lambda, 0)\cdot(1+\lambda, 3-\lambda, 1) = 0$$
$$(\lambda-\mu)\cdot(1+\lambda)+(\mu-\lambda)\cdot(3-\lambda)+0 = 0$$
$$(\lambda-\mu)\cdot(1+\lambda-3+\lambda) = 0$$
$$2\cdot(\lambda-\mu)\cdot(\lambda-1) = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \implies \boxed{A(1,1,-1)} \\ \cancel{\lambda=\mu} \text{ pues en ese caso A=B} \end{cases}$$

- $Area_{\overset{\triangle}{ABP}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
Area_{\underset{ABP}{\triangle}} &= \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\mu & \mu-1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\cdot|(\mu-1,\mu-1,4-4\mu)| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(\mu-1)^2+(\mu-1)^2+(4-4\mu)^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{18\cdot(\mu-1)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot|\mu-1| = \frac{3}{\sqrt{2}} \\
&\Longrightarrow |\mu-1| = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \mu-1=1 \Longrightarrow \mu=2 \Longrightarrow \boxed{B_1=(0,2,-1)} \\ \mu-1=-1 \Longrightarrow \mu=0 \Longrightarrow \boxed{B_2(2,0,-1)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

———————— ○ ————————

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

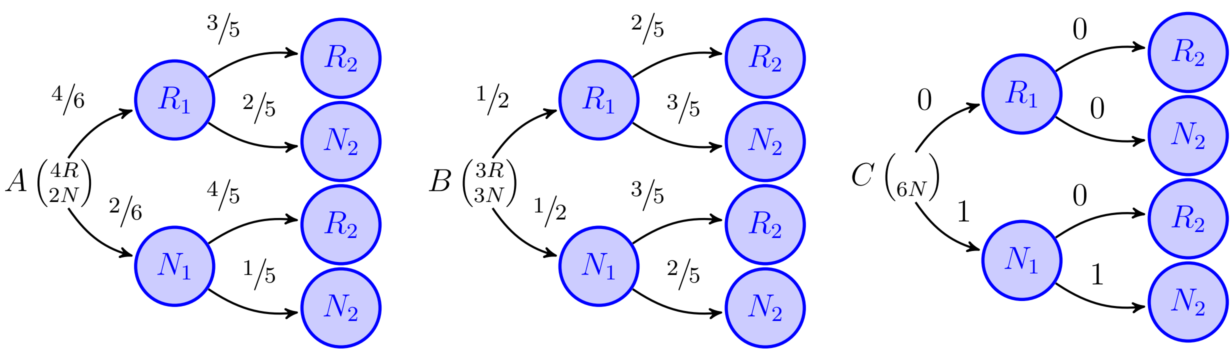
(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción A)

Solución.

Asumiendo que la probabilidad de elegir cualquier urna es la misma tenemos que:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

Se muestra a continuación, para cada una de las urnas, la probabilidad de elegir una bola roja o una negra en cada una de las dos extracciones.



a)
$$
\begin{aligned}
P(R_1) &= P(A\cap R_1) + P(B\cap R_1) + P(C\cap R_1) \\
&= P(A)\cdot P(R_1 \mid A) + P(B)\cdot P(R_1 \mid B) + P(C)\cdot P(R_1 \mid C) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{7}{18} = 0.3889
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
P(R_1 \cap N_2) &= P(A \cap R_1 \cap N_2) + P(B \cap R_1 \cap N_2) + P(C \cap R_1 \cap N_2) \\
&= P(A) \cdot P(R_1 \cap N_2 \mid A) + P(B) \cdot P(R_1 \cap N_2 \mid B) \\
&+ P(C) \cdot P(R_1 \cap N_2 \mid C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 \\
&= \frac{17}{90} = 0.1889
\end{aligned}
$$

c) $P(N_2 \mid R_1) = \dfrac{P(R_1 \cap N_2)}{P(R_1)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35} = 0.4857$

2020 Septiembre (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) *Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.*

b) *Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.*

c) *Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^\top$ (donde $B^\top$ denota la matriz traspuesta de B).*

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $\left|ABB^\top\right| = |A| \cdot \left|BB^\top\right| = 1 \cdot \left|BB^\top\right| = \left|BB^\top\right|$

$$BB^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|BB^\top\right| = 0$$

$$\left|ABB^\top\right| = \left|BB^\top\right| = 0$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$*, donde* $t > 0$ *es el tiempo de funcionamiento.*

a) Calcular hacia qué valor tiende la portencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante ene le que se alcanza.

c) La energía total $E(t)$ *generada por la pila hasta el instante* t*, se relaciona con la potencia mediante* $E'(t) = P(t)$*, con* $E(0) = 0$*. Calcular la energía producida por la pila entre el instante* $t = 0$ *y el instante* $t = 2$*.*

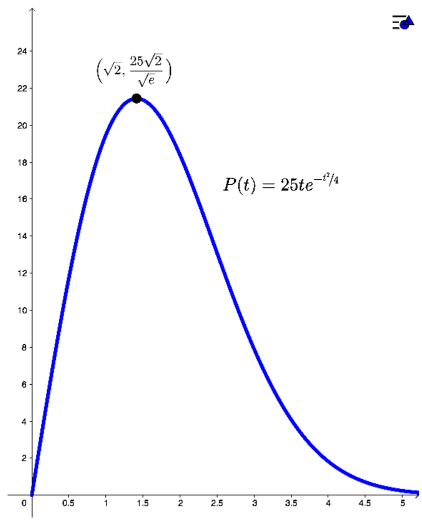
(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 25te^{-t^2/4} = [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = 0$

Lo que significa que, con el tiempo, la batería se termina agotando.

b)
$$P'(t) = 25e^{-t^2/4} + 25te^{-t^2/4} \cdot \left(-\frac{2t}{4}\right)$$
$$= e^{-t^2/4} \cdot \left(25 - \frac{25t^2}{2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{-t^2/4} \Rightarrow \nexists \text{ Sol.} \\ \dfrac{50 - 25t^2}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \cancel{-\sqrt{2}} \\ t = \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$
$$P''(t) = e^{-t^2/4}\left(\frac{25t^3}{4} - \frac{75t}{2}\right)$$
$$P''(\sqrt{2}) < 0 \overset{(\cap)}{\Longrightarrow} \text{Máximo}$$



Por lo que existe un máximo de potencia igual a $P(\sqrt{2}) = \dfrac{25\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$ en $t = \sqrt{2}$.

c)
$$E'(t) = P(t) \implies E(t) = \int P(t)dt = \int 25te^{-t^2/4}\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = -\dfrac{t^2}{4} \\ du = -\dfrac{t}{2}\,dt \implies -\dfrac{2}{t}\,du = dt \end{array} \right\}$$
$$= -\int 25\cancel{t}e^u \cdot \frac{2}{\cancel{t}}\,du = -50e^u + C = -50e^{-t^2/4} + C$$
$$E(0) = 0 \implies -50 + C = 0 \implies C = 50 \implies E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$$
$$E_0^2 = E(2) - E(0) = \left(-\frac{50}{e} + 50\right) - 0 = \frac{50}{e} \cdot (e - 1) \simeq 31.606$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

a)

$$r \equiv \begin{cases} P = M_{\overline{AC}} = \left(\dfrac{1+4}{2}, \dfrac{0+3}{2}, \dfrac{-1-2}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right) \\ \left.\begin{array}{l} r \perp \overrightarrow{AC} = (3,3,-1) \\ r \perp \overrightarrow{BC} = (2,2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{d_r} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4,4,0) \approx (-1,1,0) \end{cases}$$

Por tanto: $r \equiv \dfrac{x - {}^5\!/_2}{-1} = \dfrac{y - {}^3\!/_2}{1} = \dfrac{z + {}^3\!/_2}{0}$, o también $r \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \lambda \\ y = \frac{3}{2} + \lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$

b) Al ser $ABCD$ un paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio por lo que:

$$M_{\overline{AC}} = M_{\overline{BD}} \implies \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{B+D}{2}$$
$$D = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) - (2,1,0) \implies D(3,2,-3)$$

$$Area_{ABCD} = \left|\overline{AB} \times \overline{AD}\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{matrix} \right\| = |(-4,4,0)| = 4\sqrt{2}\, u^2$$

c) Sean los vectores: $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ & $\overrightarrow{AC} = (3,3,-1)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{|3+3-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}} = \frac{5\sqrt{57}}{57}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) Calcular $P(Y)$.

b) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

(Madrid - Matemáticas II - Septiembre 2020 - Opción B)

Solución.

Teniendo en cuenta que los sucesos X e Y son independientes tenemos:

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) \quad \& \quad P(X) = 0.4 \quad \& \quad P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$$

a) $P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) = P(X) - P(X) \cdot P(Y) = 0.4 - 0.4 \cdot P(Y) = 0.08 \implies P(Y) = 0.8$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0.4 + 0.8 - 0.4 \cdot 0.8 \implies P(X \cup Y) = 0.88$

c) El número de éxitos Z del experimento es una variable aleatoria binomial $Z : \mathcal{B}\Big(n, p = P(\overline{X})\Big) = \mathcal{B}(8, 0.6)$

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2) &= 1 - P(Z < 2) = 1 - \Big[P(Z = 0) + P(Z = 1)\Big] \\ &= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0.6^0 \cdot 0.4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0.6^1 \cdot 0.4^7\right] = 1 - 0.0085 = 0.9915 \end{aligned}$$