Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JULIO 2020
(Ordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

15 de julio de 2020

2020

Julio 2020 (Ordinario)

2020 Julio
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) *Discutir el sistema según los diferente valores de a.*

b) *Resolver el sistema para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^2 + a = a \cdot (a + 1) = 0 \implies a = \{0, -1\}$$

- Si $a \neq \{-1, 0\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xRightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=-1 \implies A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^{*})=3$

  $\operatorname{ran}(A)=2 \neq \operatorname{ran}(A^{*})=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a=0 \implies A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \implies \operatorname{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^{*})=2$

  $\operatorname{ran}(A)=2=\operatorname{ran}(A^{*}) \neq$ nº incóg. $=3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente es necesario resolver el sistema formado por las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero obtenido en la discusión.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \; x+\lambda=1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \; y-\lambda=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \; z=\lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} C_1 \leftrightarrow C_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ -1 & 1 & -a & 2a \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 3a \end{array}\right) \implies \begin{cases} -a=0 \implies a=0 \\ a+1=0 \implies a=-1 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-1,0\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \square \\ 0 & \square & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado

- Si $a=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad z=1 \\ \Rightarrow \quad z=-1/3 \end{array} \Rightarrow$ Sist. Incompatible

- Si $a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \ x + \lambda = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ y - \lambda = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ z = \lambda \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) *Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.*

b) *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.*

c) *Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a) Si queremos que $f(x)$ y $g(x)$ tomen el mismo valor en un punto c del intervalo $[1, 10]$ ha de verificarse:

$$f(c) = g(c) \implies h(c) = f(c) - g(c) = 0$$

Es decir que el problema se reduce a determinar si la función $h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ tiene alguna raíz en el intervalo $[1, 10]$, para lo que aplicaremos el *Teorema de Bolzano*, que dice:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } h(x) \text{ es continua en } [a, b] \\ \text{Signo } h(a) \neq \text{Signo } h(b) \sim h(a) \cdot h(b) < 0 \end{array}\right\} \implies \exists c \in (a, b) \mid h(c) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } h(x) \text{ es continua en } [1, 10] \checkmark \\ h(1) \cdot h(10) = (-3) \cdot 1239 < 0 \checkmark \end{array}\right\} \xrightarrow{\textit{Th. Bolzano}} \exists c \in (1, 10) \mid h(c) = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

b) La pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ es $m_r(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$. Si queremos determinar el punto en donde la pendiente es mínima tendremos que hallar el mínimo de la función $m_r(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} m_r'(x) = 6x + 6 = 0 \implies x = -1 \\ m_r''(x) = 6 > 0 \overset{\cup}{\implies} \text{Mínimo} \end{array}\right\} \implies$$ La pendiente mínima se sitúa en el punto $x_0 = -1 \implies y_0 = f(-1) = 1$ y valdrá $m_r(1) = 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -3$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = -3(x + 1) \implies \boxed{r \equiv y = -3x - 2}$$

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3+3x^2-1}{6x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6x}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{6}\ln|x|\Big]_1^2 = \left(\frac{8}{18}+\frac{4}{4}-\frac{1}{6}\ln|2|\right)-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cancelto{0}{\ln|1|}\right)$$

$$= \frac{41}{36}-\frac{1}{6}\ln 2 \simeq 1.023$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ *, se pide:*

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

a)

$$r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases} \equiv \begin{cases} R(0,-2,1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,3) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \equiv \begin{cases} S(-1,-4,0) \\ \vec{d_s}=(2,-1,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{RS} = (-1,-2,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{RS},\vec{d_r},\vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \text{ y como } \vec{d_r} \nparallel \vec{d_s} \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $$\pi \equiv \begin{cases} P(2,-1,5) \\ \pi \perp r \implies \vec{n}_\pi = \vec{d_r} = (1,1,3) \end{cases} \implies 1\cdot 2+1\cdot(-1)+3\cdot 5+D=0 \Rightarrow D=-16$$

$$\boxed{\pi \equiv 3x+y+z-16=0}$$

c) $$\beta \equiv \begin{cases} \beta \parallel r \implies \vec{u}_\beta = \vec{d_r} = (1,1,3) \\ s \in \beta \implies \begin{cases} S(-1,-4,0) \\ \vec{v}_\beta = \vec{d_s} = (2,-1,1) \end{cases} \end{cases} \implies \beta \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\beta \equiv 4x+5y-3z+24=0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) *Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.*

b) *Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.*

c) *En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos: $D_i \equiv$ El arquero hace diana en el disparo i

a) $P(D_1) + P(\overline{D_1} \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap D_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79$

b) $P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \overline{D_3} \cap \overline{D_4}) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$

c) Sea X el número de arqueros que aciertan al globo $\longrightarrow X : \mathcal{B}(10, 0.85)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \implies P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0.85^6 \cdot 0.15^4 = 0.04$$

2020 Julio
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 *millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de* 13740 *toneladas de doradas y* 23440 *toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron* 7400 *toneladas por un valor de* 63.6 *millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue* 11 *céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio del kilo de dorada (euros)"} \\ y &\equiv \text{"Precio del kilo de lubina (euros)"} \\ z &\equiv \text{"Precio del kilo de rodaballo (euros)"} \end{aligned}$$

Escribimos las ecuaciones, teniendo en cuenta que expresamos las cantidades en miles de kilos y el precio en miles de euros.

$$\left.\begin{aligned} 13740x + 23440y + 7400z = 275800 \\ x = y + 0.11 \\ 7400z = 63600 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 1 & -1 & 0 & 0.11 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13740 & 23440 & 7400 & 275800 \\ 0 & -37180 & -7400 & -274288.6 \\ 0 & 0 & 7400 & 63600 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 13740x + 23440 \cdot 5.6667 + 7400 \cdot 8.5946 = 275800 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ -37180y - 7400 \cdot 8.5946 = -274288.6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ 7400z = 63600 \Rightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} x &= 5.7767 \\ y &= 5.6667 \\ z &= 8.5946 \end{aligned}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)^3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad en $[-4,4]$.

b) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4,4]$.

c) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ *está definida, es continua y es derivable en* $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

a)
- Si $x \in [-4,1)$, $f(x) = (x-1)^2$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x \in (1,4]$, $f(x) = (x-1)^3$, que es continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x = 1$.
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3 = 0$
  - $f(1) = (1-1)^2 = 0$

  Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Por tanto $f(x)$ es continua en el intervalo $[-4,4]$

b) La derivada de la función es $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x < 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2(x-1) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 3(x-1)^2 = 0 \end{array}\right\} \implies f(x) \text{ es derivable en } [-4,4]$$

- Si $x \in [-4,1)$, $f'(x) < 0 \implies f(x)$ es *decreciente.*
- Si $x \in (1,4]$, $f'(x) > 0 \implies f(x)$ es *creciente.*

c) $g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Cpntinuidad en $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2(x-1) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} 3(x-1)^2 = 0$
  - $g(1) = 2(1-1)^2 = 0$

  Luego $g(x)$ es continua en $x = 1$.

- Derivabilidad en $x = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 1^-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$
  - $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x) = \lim\limits_{x\to 1} 6(x-1) = 0$

  Luego $g(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:*
>
> *a) Hallar la proyección de Q sobre π.*
>
> *b) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.*
>
> *c) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)*

Solución.

a) Para hallar la proyección de Q sobre π:

- Determinamos la recta r perpendicular a π que pase por Q.

$$r \equiv \begin{cases} Q(-1,0,1) \in r \\ r \perp \pi \implies \vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (1,2,-3) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{cases}$$

- La proyección Q' será el punto de corte de r con π.

$$r\cap\pi \implies (-1+\lambda)+2\cdot 2\lambda-3\cdot(1-3\lambda) = 4 \implies \lambda = \frac{4}{7} \implies Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

b) Sea α el plano para lelo a π que pasa por P.

$$\alpha \equiv \begin{cases} P(-3,1,2) \\ \alpha \parallel \pi \implies \vec{n}_\alpha = \vec{n}_\pi = (1,2,-3) \end{cases} \implies -3+2\cdot 1-3\cdot 2+D = 0 \Rightarrow D = 7$$

$$\boxed{\alpha \equiv x+2y-3z+7 = 0}$$

c) Llamamos β al plano perpendicular a π que pasa por P y Q.

$$\beta \equiv \begin{cases} Q(-1,0,1) \in \beta \\ \beta \perp \pi \implies \vec{u}_\beta = \vec{n}_\pi = (1,2,-3) \\ \vec{v}_\beta = \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1) \end{cases} \implies \beta \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-5x-5y-5z = 0 \implies \boxed{\beta \equiv x+y+z = 0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$P(A) = 0.5 \quad \& \quad P(B) = 0.25 \quad \& \quad P(A \cap B) = 0.125$$

Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) *Sea C otro suceso, incompatible con A con B. ¿Son compatibles los sucesos C? y $A \cup B$?*

b) *¿Son A y B independientes?*

c) *Calcular la probabilidad $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).*

d) *Calcular $P(\overline{B} \mid A)$.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2020 - Opción B)

Solución.

a) C es incompatible con A y con $B \implies P(A \cap C) = 0 \quad \& \quad P(B \cap C) = 0$
$P(C \cap (A \cup B)) = P((C \cap A) \cup (C \cap B)) = P(\varnothing) = 0 \implies$ incompatibles

b) $$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.125 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.25 = 0.125 \end{array}\right\} \implies A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

c) $$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= 1 - (0.5 + 0.25 - 0.125) = 0.375$$

d) $$P(\overline{B} \mid A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5 - 0.125}{0.5} = 0.75$$