Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos

EVAU JULIO 2020 - Coincidentes (Ordinario)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

17 de julio de 2020

Julio 2020 (Coincidentes)

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) *Calcule* A^2 *y* A^{10}.

b) *Calcule* $(AA - 3I)^{-1}$, *donde* I *es la matriz identidad de orden* 3.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

b)

$$AA-3I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$|AA-3I|=4\implies(AA-3I)^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la región del plano S definida por:

$$x-y\geq 0,\qquad y+2x\leq 8,\qquad 0\leq y\leq 2$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,y)=4x-y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

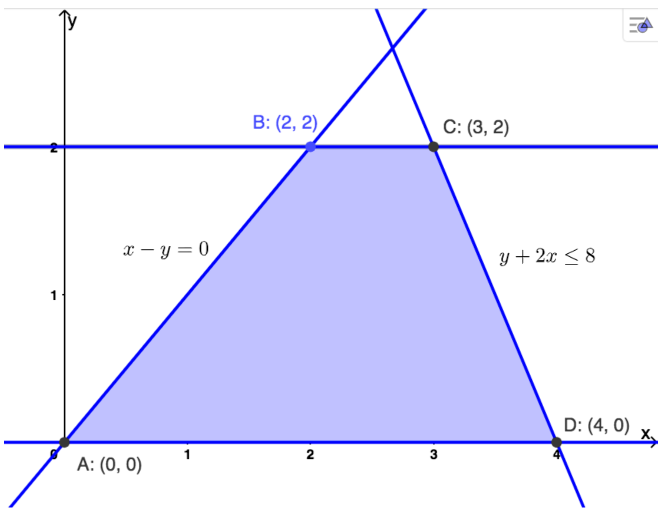
Solución.

- `Región Factible` Escribimos la región S y los puntos necesarios para su representación

$$S\equiv\begin{cases}① \; x-y\geq 0 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (4,4)\\ ② \; y+2x\leq 8 & \rightarrow (0,8) \quad \& \quad (4,0)\\ ③ \; 0\leq y\leq 2 & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (0,2)\end{cases}$$

- `Función objetivo` $\qquad f(x,y)=4x-y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.



- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	0	0	0
B	2	2	6
C	3	2	10
D	4	0	16

Por tanto $f(x)$ tiene un *mínimo* igual a 0 en $A(0,0)$ y un *máximo* igual a 16 en $D(4,0)$.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

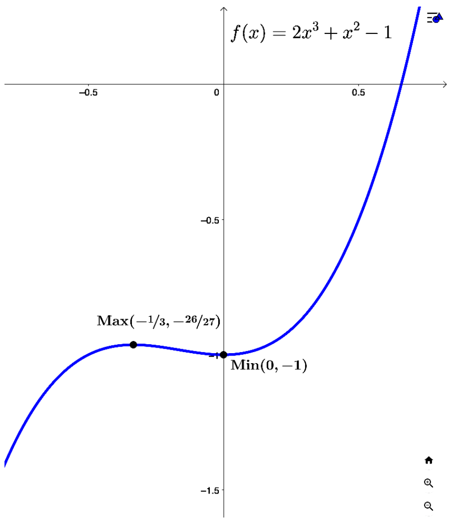
a) Para que $f(x)$ tenga un máximo relativo en $x = -1 \implies \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax \implies f'(-1) = 6 - 2a = 0 \implies \boxed{a = 3}$$
$$f''(x) = 12x + 2a \implies f''(-1) = -12 + 2a < 0 \implies a < 6 \checkmark$$

b) Para $a = 1$ la función es $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \implies 2x \cdot (3x + 1) = 0$$
$$\implies x = \{0, -1/3\}$$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decrec. $\searrow$	Creciente $\nearrow$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1/3) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1/3, 0)$, y tiene un *mínimo relativo* en $(0. -1)$ y un *máximo relativo* en $(-1/3, -26/27)$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

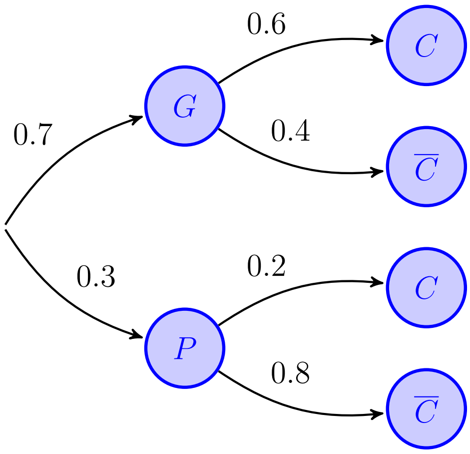
a) El espectáculo sea gratuito y no se realize en la calle.

b) El espectáculo se realice en la calle.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:



$G \equiv$ "El espectáculo es gratuito"
$P \equiv$ "El espectáculo es de pago"
$C \equiv$ "El espectáculo se hace en la calle"

a) $$P(G \cap \overline{C}) = P(G) \cdot P(\overline{C} \mid G) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

b) $$P(C) = P(G \cap C) + P(P \cap C) = P(G) \cdot P(C \mid G) + P(P) \cdot P(C \mid P) = 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.48$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) *Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.*

b) *Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

$$X \equiv \text{"Salario medio bruto anual (euros)"} \longrightarrow X : (\mu, 900)$$

a) $n = ?\quad \&\quad E \leq 200\quad \&\quad 1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.056 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 200 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{900}{200}\right)^2 = 77.79 \implies \boxed{n = 78 \text{ euros}}$$

b) $X : \mathcal{N}(1889, 900) \xrightarrow{n=64} \overline{X} : \mathcal{N}\left(1889, \dfrac{900}{\sqrt{64}} = 112.5\right)$

$$P\left(\overline{X} \geq 1900\right) = P\left(Z \geq \frac{1900 - 1889}{112.5}\right) = P(Z \geq 0.098) = 1 - P(Z \leq 0.098)$$
$$= 1 - 0.5398 = 0.4602$$

Julio 2019 (Coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=2a \\ 2x+ay+2z=3 \\ -x-y-z=2 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = -2a+4 = 0 \implies a=2$$

- Si $a \neq 2 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a=2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a=0$ por el método de Gauss, sabiendo que como $a \neq 2$

estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[F_1 \leftrightarrow F_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -x - (-7/2) - (-5/4) = 2 \\ -2y = 7 \\ -4z = 5 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ y = -7/2 \\ z = -5/4 \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left[C_2 \leftrightarrow C_3 \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 2 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2a+6 \\ 0 & 0 & a-2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - 2 = 0 \\ \boxed{a = 2} \end{array} \right.$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$ Sist. Incompatible

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a = 0$. Hay que recordar que en la discusión por el método de Gauss hemos intercambiado las columnas $C_2 \leftrightarrow C_3$, por lo que las incógnitas $y \leftrightarrow z$ están intercambiadas.

$$A/A^* \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{r} -x - (-5/4) - (-7/2) = 2 \\ -2z - (-7/2) = 6 \\ -2y = 7 \end{array} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x = 11/4 \\ z = -5/4 \\ y = -7/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = 1 \implies f''(1) = 0$

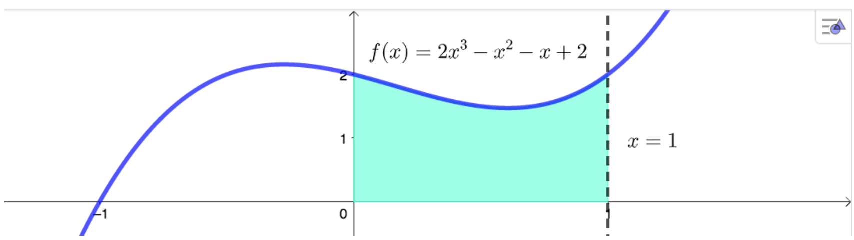
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \\ f''(x) = 6ax - 2 \end{array}\right\} \implies f''(1) = 6a - 2 = 0 \implies \boxed{a = 1/3}$$

b) Para $a = 2$ la función $f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$
Los puntos de corte de la función con el eje OX son:

$$2x^3 - x^2 - x + 2 \overset{Ruffinni}{=} (x + 1) \cdot (2x^2 - 3x + 2) = 0 \implies x = -1$$

que junto con las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$ determinan un único recinto de integración $A_1 = (0, 1)$

$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\,dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{5}{3}$$
$$Area = |A_1| = \left|\frac{5}{3}\right| = 1.667\ u^2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & si\ x > 1 \\ -x^2 & si\ x \leq 1 \end{cases}$$

a) *Calcule* $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. *¿Es la función* $f(x)$ *continua en todo su dominio?.*

b) *Calcule las asíntotas de* $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Para determinar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ tenemos que hallar los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(-x^2) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x-1)} \cdot (x+1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

y por tanto

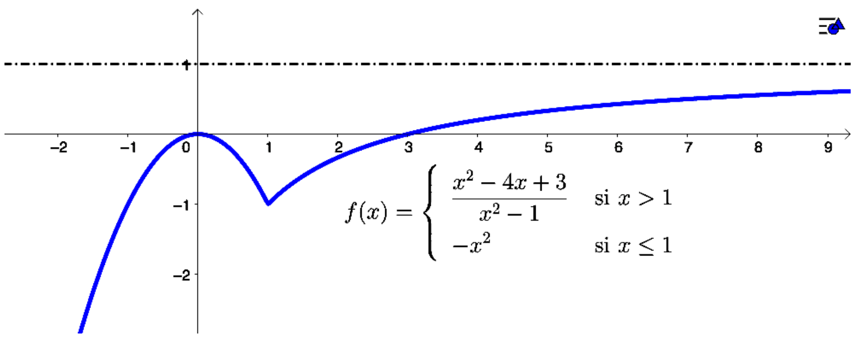
$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

Veamos la continuidad de la función $f(x)$.

- Si $x < 1$, $f(x) = -x^2$, continua en $\mathbb{R}$.
- Si $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$, continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, luego $f(x)$ es continua en $x > 1$.
- Si $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

En definitiva $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b)
- `A. Vertical` $\nexists$ A.V. pues $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- `A. Horizontal`
  - Cuando $x \to -\infty$ hay una rama parabólica.
  - $y = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos:

$P \equiv$ ”La venta es un periódico” $\quad$ $R \equiv$ ”La venta es una revista”

$C \equiv$ ”La edición es en castellano” $\quad$ $O \equiv$ ”La edición es en otro idioma”

Escribimos los datos en una tabla de contingencia supuesto un total de 100 publicaciones.

	P	R	**Total**
C	38	52	90
O	2	8	10
Total	40	60	100

a) $P(P \mid O) = \dfrac{2}{10} = 0.2$

b) $P(P \cup O) = P(P) + P(O) - P(P \cap O) = \dfrac{40}{100} + \dfrac{10}{100} - \dfrac{2}{100} = 0.48$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$ euros.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2020 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \xrightarrow{n=100} \overline{x} = 5100$

$$1-\alpha = 0.90 \implies \alpha = 0.10 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1-\alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{500}{\sqrt{100}} = 82.25$$

$$I.C. = (\overline{x} - E, \overline{x} + E) = (5017.75; 5182.25)$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 500) \quad \& \quad n = 36 \quad \& \quad E = 160$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{36}} = 160 \implies z_{\alpha/2} = 1.92$$

$$z_{\alpha/2} = 1.92 \xrightarrow{Tabla} 1-\alpha/2 = 0.9726 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0274 \Rightarrow \alpha = 0.0548 \Rightarrow 1-\alpha = 0.9452$$