Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

MODELO 2020

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

20 de abril de 2020

2020

Modelo 2020

Modelo 2020
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) *Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determínese cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.*

b) *Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.*

Mezcla	*Nitrógeno*	*Oxígeno*	*Argón*
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a)

$$\ell \text{ nitrógeno} = 0.78 \cdot 2000 = 1560$$
$$\ell \text{ oxígeno} = 0.21 \cdot 2000 = 420$$
$$\ell \text{ argón} = 0.01 \cdot 2000 = 20$$

b) Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{Litros de de la mezcla A}$$
$$y \equiv \text{Litros de de la mezcla B}$$
$$z \equiv \text{Litros de de la mezcla C}$$

Para determinar el sistema de ecuaciones vamos a decir que la cantidad de cada uno de los gases ha de ser la obtenida en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{l} 0.8x + 0.7y + 0.6z = 1560 \\ 0.2x + 0.2y + 0.4z = 420 \\ 0.1y = 20 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 2y + 4z = 4200 \\ y = 200 \\ 8x + 7y + 6z = 15600 \end{array}\right\}$$

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 8 & 7 & 6 & 15600 \end{array}\right) \underset{F_3 - 4F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & -10 & -1200 \end{array}\right) \underset{F_3 + F_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4200 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & -10 & -1000 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x + 2\cdot 200 + 4\cdot 100 = 4200 \\ y = 200 \\ -10z = -1000 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) *Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $^3/_e$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.*

b) *Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4}$.*

c) *Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{3x-2} \\ f'(x) &= 3e^{3x-2} \end{aligned}$$

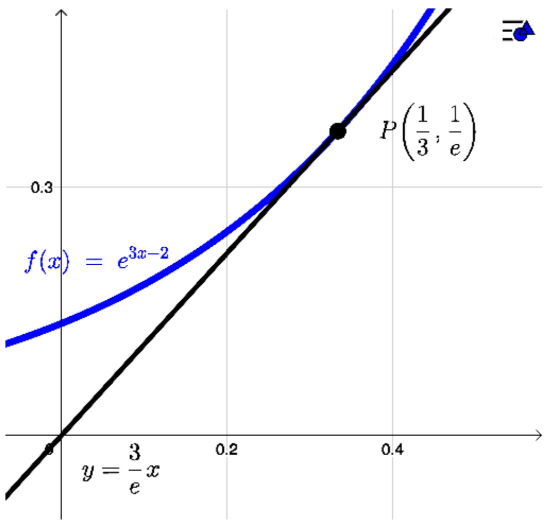
$$m_r = f'(x_0) \Longrightarrow \frac{3}{e} = 3e^{3x_0-2}$$

$$\cancel{3}e^{-1} = \cancel{3}e^{3x_0-2} \Longrightarrow -1 = 3x_0 - 2$$

$$x_0 = 1/3 \quad y_0 = 1/e$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{e}x}$$



b) $$\lim_{x\to 2/3} \frac{1 - f(x)}{6x - 4} = \lim_{x\to 2/3} \frac{1 - e^{3x-2}}{6x - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -\frac{1}{2}$$

c) Tenemos que hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = e^{3x-2}$ y $g(x) = 1$, para lo que se define la función $h(x) = f(x) - g(x) = e^{3x-2} - 1$ calculando los puntos de corte con el eje OX.

$$e^{3x-2} - 1 = 0 \implies e^{3x-2} = 1 \implies 3x - 2 = 0 \implies x = 2/3$$

Tenemos un único recinto de integración $A_1 = (0, 2/3)$ definido por la recta vertical $x = 0$ y el punto de corte de $h(x)$ con el eje OX.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{2/3} \left(e^{3x-2} - 1\right) dx = \frac{1}{3}\int_0^{2/3} 3 \cdot e^{3x-2}\, dx - \int_0^{2/3} dx = \left.\frac{1}{3}e^{3x-2} - x\right]_0^{2/3} \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3}e^{-2} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) \\ Area &= |A_1| = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)\ u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos los vectores directores de ambas rectas para ver si son paralelas

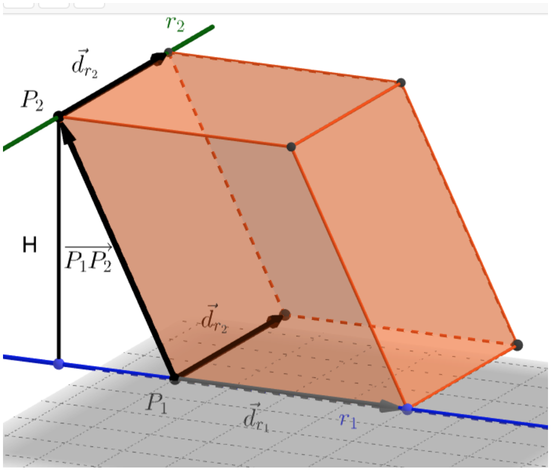
$$r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \equiv \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_1(-1, 2, 0) \\ \vec{d}_{r_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -3, 1) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x - 5z - 4 = 0 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} P_2(4, -3, 0) \\ \vec{d}_{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5, 4, 1) \end{cases}$$

Como $\vec{d}_{r_1} \nparallel \vec{d}_{r_2}$ las rectas se cortan en un plano o se cruzan en el espacio. Para determinarlo sacamos el vector que une un punto de cada recta $\overrightarrow{P_1P_2} = (5, -5, 0)$ y hallamos el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}\right] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

Para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan hallaremos la altura del paralelepípedo formado por los vectores directores de ambas rectas y el vector $\overrightarrow{P_1, P_2}$.



$$Vol_{paralel.} = A_{base} \cdot H \implies H = \frac{Vol}{A_{base}}$$

Como el volumen del paralelepípedo es $\left|\left[\vec{d}_{r_1}, \vec{d}_{r_2}, \overrightarrow{P_1P_2}\right]\right|$ y el área de la base es $\left|\vec{d}_{r_1} \times \vec{d}_{r_2}\right|$ tenemos que:

$$d(r_1, r_2) = H = \frac{|-55|}{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{matrix} \right\|} = \frac{55}{|(-7, 4, 19)|} = \frac{55}{\sqrt{426}} \simeq 2.66$$

b) Hallamos el plano π que pasa por el punto $O(0, 0, 0)$ y contiene a la recta r_1.

$$\pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ r_1 \end{cases} \equiv \left[\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_1}, \vec{d}_{r_1}\right] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z = 0$$

Para hallar el punto P de corte $r_2 \cap \pi$ escribimos la recta r_2 en forma paramétrica y la sustituimos en la ecuación del plano:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies 2 \cdot (4 + 5\lambda) + -3 + 4\lambda + \lambda = 0 \implies 5 + 15\lambda = 0$$

$$\implies \lambda = -1/3 \implies \boxed{P = (7/3, -13/3, -1/3)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(A \cup B) = 0.55 \quad \& \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0.90 \quad \& \quad P(B \mid A) = 0.25$$

Se pide:

a) Calcular $P(A \cap B),\ P(A),\ P(B)$ y $P(B \mid \overline{A})$.

b) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción A)

Solución.

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.90 \implies P(A \cap B) = 1 - 0.90 = 0.1$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.1}{P(A)} = 0.25 \implies P(A) = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + P(B) - 0.1 = 0.55 \Rightarrow P(B) = 0.25$$

$$P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{\overline{A}} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0.25 - 0.1}{1 - 0.4} = 0.25$$

b) $$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = 0.1 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1 \end{array}\right\} \implies \text{Los sucesos son independientes}$$

2020 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a)

$$\text{ran}(A) = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \text{ran}\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \circ \text{ Si } t \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 2 \\ \circ \text{ Si } t = 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 1 \end{cases}$$

b) Para que el sistema sea compatible determinado tiene que cumplirse que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $= 2$ por lo que $t \neq 0$. Resolvemos por el método de Gauss.

$$A \mid A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{bmatrix} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Para que ran}(A^*) = 2 \\ 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1 \end{array}$$

Si $t = -1$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 6 \\ y = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, *se pide:*

a) *Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en* $x = 2$.

b) *Determinar las posibles asíntotas de la curva* $y = f(x)$ *y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de* $f(x)$.

c) *Calcular* $\displaystyle\int_0^2 x \cdot f(x)\, dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

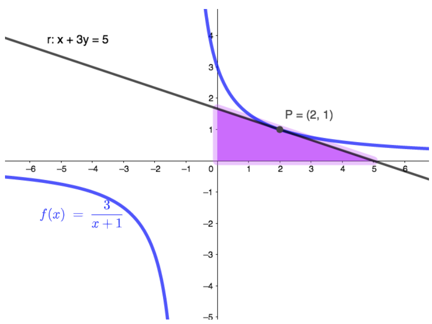
Solución.

a) Hallamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

- $x_0 = 2 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2}$
- $m_r = f'(2) = \dfrac{-3}{3^2} = -\dfrac{1}{3}$
- $r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0) \implies y - 1 = -\dfrac{1}{3} \cdot (x - 2) \implies r \equiv x + 3y = 5$

Hallamos los puntos de corte con:
Ejer OX: $y = 0 \implies x = 5$
Ejer OY: $x = 0 \implies 3y = 5 \implies y = 5/3$
El área del triángulo será:

$$Area = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 5/3}{2} = \frac{25}{6}\ u^2$$



b)
- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0 \implies$ A.H. en $y = 0$
- `A. Vertical` Hallamos las raíces del denominador: $x + 1 = 0 \implies x = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3}{x+1} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ A.V. en $x = -1$

Hallamos los puntos singulares: $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)^2} = 0 \implies \nexists$ *P.S.*

Como $f'(x) < 0\ \forall x \in \text{Dom}(f)$, la función es decreciente en todo su dominio.

c) $$\int_0^2 x \cdot f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1}\, dx = \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{x+1}\right) dx = \int_0^2 3\, dx - 3\int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx$$

$$= 3x - 3\ln|x+1|\Big|_0^2 = (6 - 3\ln 3) - (0 - \cancelto{0}{\ln 1}) = 6 - \ln 27$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ *y la recta* $r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Calcular el área del triángulo $\overset{\triangle}{OPQ}$ *, siendo* $O(0,0,0)$*,* P *el punto medio del segmento* $\overline{AB}$ *y* Q *la intersección de la recta que pasa por* A *y* B *y el plano* $\pi \equiv z = 7$*.*

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por A *y es perpendicular a la recta* r*.*

c) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r *y la recta que pasa por* A *y* B*.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

a) Calculamos $P = M_{\overline{AB}} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (2,0,1)$

Sea s la recta que pasa por A y B $\Longrightarrow$ $s \equiv \begin{cases} A(1,1,-2) \\ \vec{d}_s = \overrightarrow{AB} = (2,-2,6) \approx (1,-1,3). \end{cases}$

Un punto genérico de la recta s tiene de coordenadas $(1+\lambda, 1-\lambda, -2+3\lambda)$
$Q = s \cap \pi \implies -2+3\lambda = 7 \implies \lambda = 3 \implies Q(4,-2,7)$.

$$\left.\begin{array}{c} O(0,0,0) \\ P(2,0,1) \\ Q(4,-2,7) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \overrightarrow{OP} = (2,0,1) \\ \overrightarrow{OQ} = (4,-2,7) \end{array}\right\} \Longrightarrow Area_{\overset{\triangle}{OPQ}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right|$$

$$Area_{\overset{\triangle}{OPQ}} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(2,-10,-4)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{120} = \sqrt{30}\ u^2$$

b) Hallamos el plano π_2 que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta r.

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} A(1,1,-2) \\ \vec{n}_{\pi_2} = \vec{d}_r = (3,5,0) \end{cases} \Longrightarrow 3x+5y+C=0 \Longrightarrow 3+5+C=0$$

$$\Longrightarrow C = -8 \Longrightarrow \boxed{\pi_2 \equiv 3x+5y-8=0}$$

c) Hallamos el coseno del ángulo que forman las rectas r y s.

$$\cos(\widehat{r,s}) = \cos(\widehat{\vec{d}_r, \vec{d}_s}) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right| \cdot \left|\vec{d}_s\right|} = \frac{|3\cdot 1 + 5\cdot(-1) + 0\cdot 3|}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{374}} = 0.1034$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media $30°C$ y varianza 25. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre $28°C$ y $32°C$.

b) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a $36°C$.

c) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2020 - Opción B)

Solución.

$$X : \mathcal{N}(30, \sigma^2 = 25) \implies X : \mathcal{N}(30, 5)$$

a) $$P(28 \leq X \leq 32) = P\left(\frac{28-30}{5} \leq Z \leq \frac{32-30}{5}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 0.4)$$
$$= P(Z \leq 0.4) - P(Z \leq -0.4) = P(Z \leq 0.4) - [1 - P(Z \leq 0.4)]$$
$$= 2 \cdot P(Z \leq 0.4) - 1 = 2 \cdot 0.6554 - 1 = 0.3108$$

b) $$P(X \geq 36) = P\left(Z \geq \frac{36-30}{5}\right) = P(Z \geq 1.2) = 1 - P(Z \leq 1.2)$$
$$= 1 - 0.8849 = 0.1151$$

Como un mes tiene 30 días, se superará la temperatura en $0.1151 \cdot 30 \simeq 3.45$, es decir, entre 3 y 4 días.

c) $$P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - P\left(Z \leq \frac{t-30}{5}\right) = 0.5$$
$$\xRightarrow{Tabla} \frac{t-30}{5} = 0 \implies t = 30°C$$