Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

MODELO 2018

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

9 de abril de 2020

2018

Modelo 2018

Modelo 2018
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *y* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = -m \cdot (3-m)^2 \neq 0 \implies m \neq \{0, 3\}$$

por tanto $\exists\ (A - mI)^{-1}$ si $m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Para $m = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A - 2I| = -2 \cdot (3-2)^2 = -2$

Hallamos la matriz inversa de $A - 2I$ por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj}\,(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{|A-2I|}\text{Adj}\,(A-2I)^{\top} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $(A-2I)^{-1} \cdot (A-2I) = I$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = 2\cos x + |x-1|$.

a) Determinar el valor de $f'(0)$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) Hallar el área del recinto plano limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

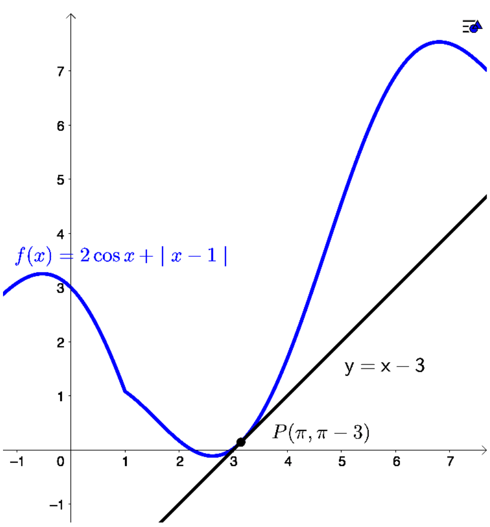
a) Escribimos la función a trozos correspondiente al desarrollo del valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x - (x-1) & \text{si } x < 1 \\ 2\cos x + (x-1) & \text{si } x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1 \end{cases}, \text{ luego la derivada será:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2\,\text{sen}\, x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -2\,\text{sen}\, x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies f'(0) = -2\,\text{sen}(0) - 1 = -1$$

b) El punto de tangencia es:

$$x_0 = \pi$$
$$y_0 = f(x_0) = f(\pi) = 2\cos\pi + (\pi - 1) = \pi - 3$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(\pi) = -2\,\text{sen}\,\pi + 1 = 1$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - (\pi - 3) = 1 \cdot (x - \pi)$$
$$\boxed{r \equiv y = x - 3}$$

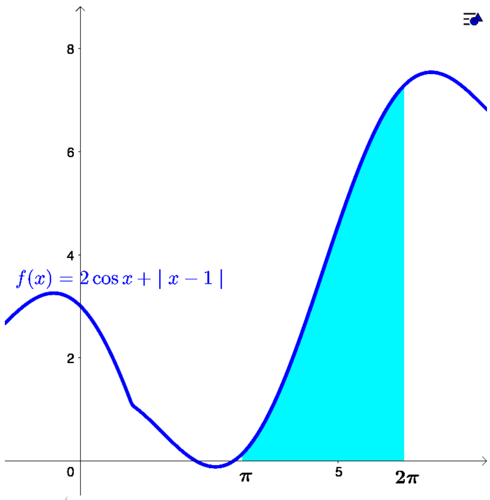


c) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \\ \bullet\ \text{Si } x \in [\pi, 2\pi] \implies f'(x) = -2\,\text{sen}\,x + 1 > 0\ \forall x \implies f(x) \text{ es creciente} \\ \bullet\ f(\pi) = 2\cos\pi + (\pi - 1) = \pi - 3 > 0 \end{array}\right\}$

Por tanto $f(x)$ no corta al eje OX, por lo que tenemos un único recinto de integración comprendido por las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\pi}^{2\pi} (2\cos x + x - 1)\, dx \\ &= -2\,\text{sen}\,x + \frac{x^2}{2} - x \Big]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \left(\cancelto{0}{-2\,\text{sen}\,2\pi} + \frac{(2\pi)^2}{2} - 2\pi\right) \\ &\quad - \left(\cancelto{0}{-2\,\text{sen}\,\pi} + \frac{\pi^2}{2} - \pi\right) = \frac{3\pi^2}{2} - \pi \end{aligned}$$

$$Area = |A_1| = \frac{3\pi^2}{2} - \pi\ u^2$$



Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$, se pide:

a) *Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2.*

b) *Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2, 3, 2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2.*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

a) Cogemos un punto $Q \in r$ genérico: $Q(1 - 2t, -1 + t, 1 + t)$, y obligamos a que $d(Q, \pi_1) = d(Q, \pi_2)$

$$\frac{|3 \cdot (1 - 2t) + (-1 + t) + 2 \cdot (1 + t) - 1|}{\cancel{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}}} = \frac{|2 \cdot (1 - 2t) - (-1 + t) + 3 \cdot (1 + t) - 1|}{\cancel{\sqrt{2^2 - + (-1)^2 + 3^2}}}$$

$$3 - 3t = \pm(5 - 2t) \implies \begin{cases} 3 - 3t = 5 - 2t \implies t = -2 & \implies Q(5, -3, -1) \\ 3 - 3t = -5 + 2t \implies t = 8/5 & \implies Q'(-11/5, 3/5, 13/5) \end{cases}$$

b) Hallamos los puntos $r \cap \pi_1 \Rightarrow R$ y $r \cap \pi_2 \Rightarrow S$

$$r \cap \pi_1 \Rightarrow 3 \cdot (1 - 2t) + (-1 + t) + 2 \cdot (1 + t) - 1 = 0 \implies t = 1 \implies R(-1, 0, 2)$$
$$r \cap \pi_2 \Rightarrow 2 \cdot (1 - 2t) - (-1 + t) + 3 \cdot (1 + t) - 1 = 0 \implies t = 5/2 \implies S(-4, 3/2, 7/2)$$

Siendo $P(-2,3,2)$, hallamos $\overrightarrow{PR}=(1,-3,0)$ y $\overrightarrow{PS}=(-2,-3/2,3/2)$

$$Area_{\underset{PRS}{\triangle}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3/2 & 3/2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\cdot|(-9/2,-3/2,-15/2)| = \frac{3\sqrt{35}}{4}\, u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide :

a) *Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.*

b) *Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.*

c) *Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción A)

Solución.

$$X \equiv \text{"Peso de los varones de 2º Bachillerato"} \sim \mathcal{N}(74,6)$$

a) $P(68 \le X \le 80) = P\left(\frac{68-74}{6} \le Z \le \frac{80-74}{6}\right) = P(-1 \le Z \le 1)$
$= P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - P(Z \ge -1) = P(Z \le 1) - [1 - P(Z \ge 1)]$
$= 2P(Z \le 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$

b) $P(X \ge 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - P\left(Z \le \frac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.8413$
$= 0.1587 \implies 0.1587 \cdot 1500 = 238$ estudiantes pesan menos de 80 kg.

c) $P(X \ge 86 \mid X \ge 76) = \dfrac{P(X \ge 86 \cap X \ge 76)}{P(X \ge 76)} = \dfrac{P(X \ge 86)}{P(X \ge 76)}$
$= \dfrac{P\left(Z \ge \frac{86-74}{6}\right)}{P\left(X \ge \frac{76-74}{6}\right)} = \dfrac{P(Z \ge 2)}{P(Z \ge 0.33)} = \dfrac{1 - P(Z \le 2)}{1 - P(Z \le 0.33)} = \dfrac{1 - 9772}{1 - 6293} = 0.0615$

2018 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix},$$

se pide:

a) *Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.*

b) *Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & m & 2+m \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = m - m^2 = 0 \implies m = \{0, 1\}$$

- Si $m \neq \{0, 1\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

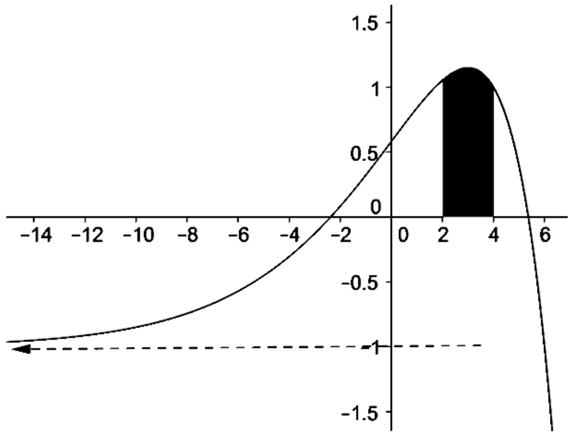
b) Resolvemos el sistema para $m = -1$ por el método de Gauss. Como $m \neq \{0, 1\}$ estamos antes un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3 + F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x + 2 - 2 = 1 \\ 2y - 2 = 2 \\ -z = 2 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función $f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$



Se pide:

a) *Calcular el área de la región sombreada.*

b) *Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.*

c) *Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).*

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Planteamos el área como la integral de la función:

$$F(x) = \int \left((6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1\right) dx = \underbrace{\int (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}}\, dx}_{I_1} - \underbrace{\int dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 6 - x \Longrightarrow du = -dx \\ dv = e^{\frac{x-4}{3}}\, dx \Longrightarrow v = 3e^{\frac{x-4}{3}} \end{array} \right\} = 3 \cdot (6 - x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}}$$

$$+ \int 3e^{\frac{x-4}{3}}\, dx = 3 \cdot (6 - x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} + 9e^{\frac{x-4}{3}} = (18 - 3x + 9) \cdot e^{\frac{x-4}{3}} = (27 - 3x) \cdot e^{\frac{x-4}{3}}$$

$$I_2 = \int dx = x$$

$$Area=\int_2^4 f(x)\,dx=F(4)-F(2)=(27-3x)\cdot e^{\frac{x-4}{3}}-x\Big]_2^4=\Big[(27-12)\cdot e^0-4\Big]$$
$$-\Big[(27-6)\cdot e^{\frac{2-4}{3}}-2\Big]=13-21e^{-2/3}=13-\frac{21}{e^{2/3}}\ u^2$$

b) Hay que maximizar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para lo cual hallaremos la pendiente:

$$f(x)=(6-x)e^{\frac{x-4}{3}}-1\Longrightarrow m(x)=f'(x)=\left(1-\frac{x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}}$$

Hallamos los puntos singulares de la función pendiente $m(x)$:

$$m'(x)=0\Longrightarrow -\frac{xe^{\frac{x-4}{3}}}{9}=0\Longrightarrow \boxed{x=0}$$
$$m''(x)=-\frac{1}{9}\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}}\Longrightarrow m''(0)=-\frac{1}{9}e^{-4/3}<0\stackrel{(\cap)}{\Longrightarrow}\text{ máximo}$$

Luego la pendiente máxima se encuentra en el punto de abscisa $x=0$ y vale

$$m(0)=\left(1-\frac{0}{3}\right)e^{\frac{0-4}{3}}=e^{-4/3}$$

c) Tenemos que calcular la asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\Big[(6-x)e^{\frac{x-4}{3}}-1\Big]=-1+\lim_{x\to\infty}(6+x)e^{\frac{-x-4}{3}}$$
$$=-1+\lim_{x\to\infty}\frac{6+x}{e^{\frac{x+4}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=}-1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x-4}{3}}}=-1+0=-1$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los planos $\pi_1\equiv x+y=0$, $\pi_2\equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) Determinar el punto B', simétrico de B respecto del plano π_2.

b) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1, paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

c) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos un punto genérico $B'\in r$

$$r\equiv\begin{cases}B(-1,1,1)\\ \vec{d_t}=\vec{n}_{\pi_2}=(1,0,0)\end{cases}\equiv\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=1\\ z=1\end{cases}\Longrightarrow B'(-1+\lambda,1,1)$$

Calculamos $r \cap \pi_2 \to X$. X será el punto medio de B y B'

$$r \cap \pi_2 \equiv -1 + \lambda = 0 \implies \lambda = 1 \implies X(0,1,1)$$
$$X = \frac{B+B'}{2} \implies (0,1,1) = \frac{(-1,1,1)+(-1+\lambda,1,1)}{2}$$
$$(0,1,1) = \left(\frac{-2+\lambda}{2}, 1, 1\right) \implies \frac{-2+\lambda}{2} = 0 \implies \lambda = 2 \implies \boxed{B' = (1,1,1)}$$

b) $r \equiv \begin{cases} B(-1,1,1) \\ \vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1) \end{cases} \implies r \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

c) El ángulo α formado por los planos π_1 y π_2 es el ángulo agudo que forman los vectores normales $\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,0)$ y $\vec{n}_{\pi_2} = (1,0,0)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}\ rad$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

Sean los sucesos:

$$F_i \equiv \text{"El caramelo extraido la vez } i \text{ es de fresa"}$$
$$M_i \equiv \text{"El caramelo extraido la vez } i \text{ es de menta"}$$
$$L_i \equiv \text{"El caramelo extraido la vez } i \text{ es de limón"}$$

a) $P(F_2) = P(F_1 \cap F_2) + P(M_1 \cap F_2) + P(L_1 \cap F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} + \frac{15}{30} \cdot \frac{10}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} = \frac{1}{3}$

b) $P(F_1 \cap F_2) = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} = \frac{3}{29}$

c) $P(F_1 \mid F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{3/29}{1/3} = \frac{9}{29}$
