Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = I$, siendo I la matriz identidad de tamaño 3×3.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2(a-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\} \implies \exists A^{-1}$
- Si $a = \{0, 2\} \implies \nexists A^{-1}$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 4^3 - 2 \cdot 4^2 = 32$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= I \\ \underbrace{A^{-1}A}_{I} X &= A^{-1}I \\ X &= A^{-1} \end{aligned}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$