Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

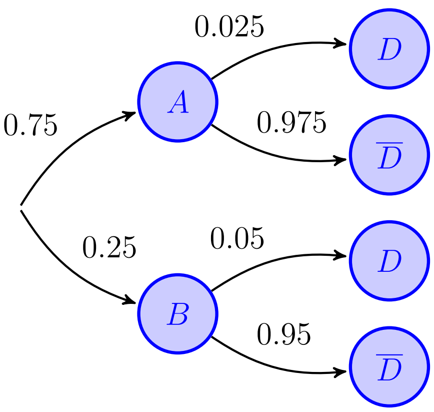
En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5 % de las veces.

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.



a) Sean los sucesos:

$$A \equiv \text{"El producto es de tipo A"}$$
$$B \equiv \text{"El producto es de tipo B"}$$
$$D \equiv \text{"El producto es defectuoso"}$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A\cap D) + P(B\cap D) \\ &= P(A)\cdot P(D\mid A) + P(B)\cdot P(D\mid B) \\ &= 0.75\cdot 0.025 + 0.25\cdot 0.05 = 0.03125 \end{aligned}$$

$5000 \cdot 0.03125 \simeq 157$ productos defectuosos

b) Ahora solo se fabrica un tipo de producto, que puede ser defectuoso o no. El número de productos defectuosos X se distribuye como una variable binomial $\mathcal{B}(6000, 0.025)$. Para poder aproximar la variable X a una normal tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} np = 6000\cdot 0.025 = 150 > 5 \ \checkmark \\ nq = 6000\cdot 0.975 = 5850 > 5 \ \checkmark \end{cases} \implies \widetilde{X} : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(150, 12.09)$$

Aplicando la corrección por continuidad de Yates.

$$\begin{aligned} P(X > 160) &= P(\widetilde{X} \geq 160.5) = P\left(Z \geq \frac{160.5-150}{12.09}\right) = P(Z \geq 0.87) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.87) = 1 - 0.8078 = 0.1922 \end{aligned}$$