Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) *Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.*

b) *Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.*

c) *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $P(0,-1,1) \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} Q(1,0,1) \\ \vec{v}=(0,1,2) \end{cases} \implies \pi \equiv \begin{cases} P(0,-1,1) \\ \overrightarrow{PQ}=(1,1,0) \\ \vec{v}=(0,1,2) \end{cases}$

$$\pi \equiv \left[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\vec{v}\right]=0 \implies \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\implies 2x-2\cdot(y+1)+1\cdot(z-1)=0 \implies \boxed{\pi \equiv 2x-2y+z-3=0}$$

b) $S \in r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \implies S(1,\lambda,1+2\lambda) \implies \overrightarrow{SP}=(-1,-1-\lambda,-2\lambda)$

$$\overrightarrow{SP}\perp r \Rightarrow \overrightarrow{SP}\perp\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{SP}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -1-\lambda-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5} \implies \boxed{S\left(1,-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)}$$

c) $T\in r \implies T(1,\lambda,1+2\lambda) \quad \& \quad P(0,-1,1) \quad \& \quad \overrightarrow{PT}=(1,1+\lambda,2\lambda)$

$$\begin{aligned} d(P,T) &= \sqrt{1^2+(1+\lambda)^2+(2\lambda)^2} \\ &= \sqrt{4\lambda^2+2\lambda+2}=\sqrt{5} \implies 5\lambda_1^2+2\lambda_1-3=0 \implies \lambda=\{-1,3/5\} \\ & T_1=(1,-1,-1) \quad \& \quad T_2=\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right) \\ & \overrightarrow{PT_1}=(1,0,-2) \quad \& \quad \overrightarrow{PT_2}=\left(1,\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}\right|=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{16}{5},-\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=\frac{12}{5}\ u^2$$

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6-2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}$ *, se pide*

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -m^2+8m-12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

- Si $m \neq \{2,\, 6\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = 2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -16 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 6 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & -48 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 6$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \end{array}\right) \sim \quad F_2 - 6F_1 \quad \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} x - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \lambda = 0 \\ 32y = -48 \\ z = \lambda \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda - 9 \\ y = -3/2 \;\;,\;\; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$