Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el punto $P(1,1,1)$ *y las rectas* $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, *se pide:*

a) *Hallar la distancia del punto* P *a la recta* r.

b) *Estudiar la posición relativa de las rectas* r *y* s.

c) *Hallar el plano perpendicular a la recta* s *y que pasa por el punto* P.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-5) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2,-1,1) \\ \vec{d_s} = (-1,1,1/3) \sim (-3,3,1) \end{cases}$$

a) $$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (0,-1,0) \\ \vec{d_r} = \sqrt{30} \end{cases} \quad \& \quad \left|\overrightarrow{PR} \times \vec{d_r}\right| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \right\| = |(5,0,1)| = \sqrt{26}$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}\, u$$

b) Como los vectores $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ no son proporcionales entonces $r \nparallel s$

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

c) El plano π pedido pasa por P y es perpendicular a s.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{n_\pi} = \vec{d_s} = (-3,3,1) \end{cases} \implies \pi \equiv -3x+3y+z+\lambda = 0$$

$$P \in \pi \implies -3+3+1+\lambda = 0 \implies \lambda = -1 \implies \boxed{\pi \equiv -3x+3y+z-1=0}$$