Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ x < -1 \\ e^{2x+2} & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) Determínese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x = -1$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f(x)$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 2x + a = a - 2 \\ \bullet \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} e^{2x+2} = 1 \\ \bullet\ f(-1) = e^{2\cdot(-1)+2} = e^0 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow a - 2 = 1 \Longrightarrow \boxed{a = 3}$$

b) Entre las rectas $x = 0$ y $x = 1$, la función $f(x) = e^{2x-2}$. Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Longrightarrow e^{2x-2} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ puntos de corte con eje X}$$

Por tanto se define un único intervalo de integración $A_1 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2e^{2x+2}\,dx = \left.\frac{1}{2}e^{2x+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right) \\ Area = |A_1| &= \left|\frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\right| \\ &= \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right)\ u^2 \simeq 23,6\ u^2 \end{aligned}$$