Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El numero de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2 \cdot (10 - t)$.

a) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a)
$$\left.\begin{array}{l} F'(t) = t^2 \cdot (10 - t) = 10t^2 - t^3 \implies F(t) = \displaystyle\int F'(t)\,dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C \\ F(0) = 6 \implies C = 6 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

b) Calculamos los puntos singulares: $F'(t) = 0 \implies t^2 \cdot (10 - t) = 0 \implies t = \{0, 10\}$

$$F''(t) = 20t - 3t^2 \implies \begin{cases} F''(0) = 0 \implies \text{Pto. Inflexión} \\ F''(10) = -100 < 0 \overset{(\cap)}{\implies} \text{Máximo en } t = 10 \implies F(10) = 839.33 \end{cases}$$

c) $F(t)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\begin{array}{lllll} F(10) = 839.3 & \& & F(11) = 782.4 & \& & F(12) = 582 \\ F(13) = 189.1 & \& & F(14) = -451.3 & & \end{array}$$

Luego por el *Teorema de Bolzano* $\exists c \in (13, 14) \mid F(c) = 0$, lo que quiere decir que entre los días 13 y 14 el brote de la enfermedad terminará.