Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$*, se pide:*

a) *Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de* $f(x)$.

b) *Calcular* $f'(4)$.

c) *Hallar el área del recinto limitado por la curva* $y = f(x)$*, el eje* OX *y las rectas* $x = -1$ *y* $x = 1$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Reescribimos la función $f(x)$ quitando el valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{(-x)^2+9}} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$

b) Cuando $x = 4$ la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - x \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \implies f'(4) = \frac{\sqrt{4^2+9} - \dfrac{4^2}{\sqrt{4^2+9}}}{4^2+9} = \frac{9}{125}$$

c) El punto de corte de $f(x)$, con el eje OX es $x = 0$, por lo que tenemos dos recintos de integración, el $A_1 = [-1, 0]$ y el $A_2 = [0, 1]$.

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_{-1}^{0} -x \cdot \left(x^2+9\right)^{-1/2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2x \cdot \left(x^2+9\right)^{-1/2} dx = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{x^2+9}\Big]_{-1}^{0} = -3 - (-\sqrt{10}) = -3 + \sqrt{10}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \sqrt{x^2+9}\Big]_{0}^{1} = \sqrt{10} - 3$$

$$\text{Area} = |A_1| + |A_2| = 2\left(\sqrt{10} - 3\right) \simeq 2\sqrt{10} - 6\ u^2$$