Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, *se pide:*

a) *Determinar su dominio.*

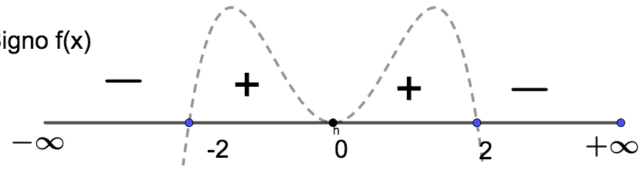
b) *Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.*

c) *Calcular los límites laterales* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

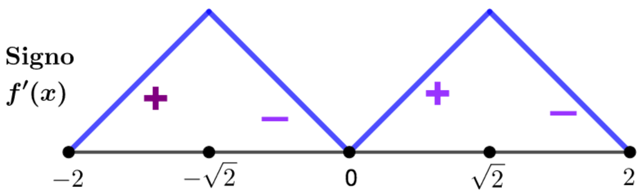
(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$
$4x^2 - x^4 \geq 0$
$-x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2) \geq 0$
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 2)\}$



b) $f'(x) = \dfrac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0$
$8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (8 - 4x^2) = 0$
$-4x \cdot \left(x - \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) = 0$
$x = \left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$



$f(x)$ es *creciente* en $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ y *decreciente* en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y tiene *máximos* en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$

c) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = 2$$