Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ *se verifica* $A^2 - I = 2A$.

b) Calcular los números reales a *para los que la matriz* A *admite inversa y calcularla cuando sea posible, en función del parámetro* a.

c) Calcular, en función de a, *el determinante de la matriz* $(AA^\top)^2$, *donde* $A^\top$ *denota la matriz traspuesta de* A.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos $a \in \mathbb{R}$ de manera que $A^2 - I = 2A$

$$\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-a)^2 & 2 \\ 2 & (1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 2-2a & \Rightarrow \boxed{a = \pm 1} \\ (1+a)^2 = 2+2a & \Rightarrow \boxed{a = \pm 1} \end{cases}$$

b) Una matriz A tiene inversa si es cuadrada y $|A| \neq 0$
$|A| = (1-a)\cdot(1+a) - 1 = -a^2 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2}\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

c) $\left|\left(AA^\top\right)^2\right| = \left|AA^\top\right|^2 = \left(|A|\cdot\left|A^\top\right|\right)^2 = (|A|\cdot|A|)^2 = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$