Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

c) Calcular $B \cdot B^{\top}$ y $B^{\top} \cdot B$, donde $B^{\top}$ denota la matriz traspuesta de B.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 4 \neq 0 \implies m \neq -2$$

b) Para $m = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = -0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B \cdot B^{\top} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{\top} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$