Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ *y el punto* $A(-4, 4, 7)$. *Se pide:*

a) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ *que sea ortogonal a* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$, *unitario y con tercera coordenada negativa.*

b) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ *que sea combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *y ortogonal a* $\vec{v}$.

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *y una de sus diagonales es el segmento* $\overrightarrow{OA}$

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Si $\overrightarrow{w_1} \perp \vec{u},\ \vec{v}$ entonces $\overrightarrow{w_1}$ es proporcional a $\vec{u} \times \vec{v}$

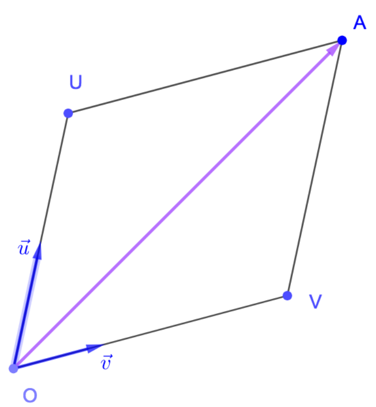
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4) \implies |\vec{w}| = \sqrt{45}$$

$$\implies \overrightarrow{w_1} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}} \right)$$

b) Si $\overrightarrow{w_2}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces $\overrightarrow{w_2} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$$\begin{gathered} \overrightarrow{w_2} \perp \vec{v} \implies \overrightarrow{w_2} \cdot \vec{v} = 0 \\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha \cdot (-2 + 0 - 3) + \beta \cdot (4 + 0 + 1) = 0 \\ -5\alpha + 5\beta = 0 \implies \alpha = \beta \end{gathered}$$

Tomando por ejemplo $\alpha = \beta = 1$ entonces $\overrightarrow{w_2} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = (1, 2, 2)$



c) $a\vec{u} + b\vec{v} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow (-a + 2b, 2a, 3a - b) = (-4, 4, 7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 & \Rightarrow a = 2 \\ -2 + 2b = -4 & \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

Luego $\overrightarrow{OU} = a\vec{u} = 2 \cdot (-1, 2, 3) = (-2, 4, 6)$

y $\overrightarrow{OV} = b\vec{v} = -1 \cdot (2, 0 - 1) = (-2, 0, 1)$

y los puntos serán:

$O(0, 0, 0)$, $U(-2, 4, 6)$, $A(-4, 4, 7)$ y $V(-2, 0, 1)$