Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

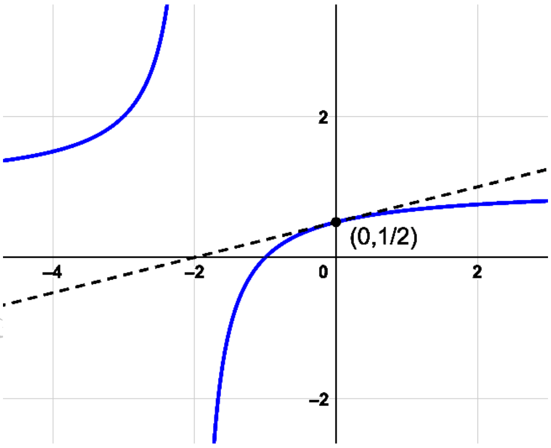
b) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) El punto de tangencia es

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = {}^1\!/_2$



$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + x - 2) - (x^2 - 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = {}^1\!/_4$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (x - 0)$$

$$\boxed{r \equiv x - 4y + 2 = 0}$$

b)
- `A.Horizontal` $y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1 \Rightarrow$ A.H. en $y = 1$
- `A. Vertical` Hallamos las raíces del denominador: $x^2 + x - 2 = 0 \implies x = \{-2, 1\}$
  - $$\lim_{x \to -2} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  - $$\lim_{x \to 1} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+2) \cdot \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

  Por tanto solo habrá A. Vertical en $x = -2$. En $x = 1$ lo que tendremos será un ”agujero”, pues el punto no pertenece al dominio de definición de la función $f(x)$.

HTTPS://APRENDECONMIC