Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) *Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.*

b) *Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.*

c) *Obtener un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos el plano π que pasa por los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AX}=(x-1,y-1,z-1)\\ \overrightarrow{AB}=(0,2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,-2,0)\end{array}\right\}\Longrightarrow \pi\equiv\left[\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=0$$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}\Longrightarrow \pi\equiv -8(x-1)+16(y-1)+8(z-1)=0$$

$$\boxed{\pi\equiv -x+2y+z-2=0}$$

b) Para que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes el producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=0$. Por lo tanto cualquier punto del plano π nos vale, por ejemplo $D(-2,0,0)$.

c) Un punto $P\in OX$ es de la forma $P(a,0,0)$.

$$\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right]\right|=1\Longrightarrow \left|\begin{vmatrix}0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\\ a-1 & -1 & -1\end{vmatrix}\right|=|-16-8a|=6$$

$$\begin{cases}-16-8a=6\Longrightarrow a=-11/4\Longrightarrow \boxed{P_1(-11/4,0,0)}\\[2mm] -16-8a=-6\Longrightarrow a=-5/4\Longrightarrow \boxed{P_2(-5/4,0,0)}\end{cases}$$