

### Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los planos  $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$ ,  $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ , se pide:

- Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
- Para el cuadrado de vértices consecutivos  $ABCD$ , con  $A(2, 1, 3)$  y  $B(1, 2, 3)$ , calcular los vértices  $C$  y  $D$ , sabiendo que  $C$  pertenece a los planos  $\pi_2$  y  $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A )

#### Solución.

- Dado que  $\pi_1 = (4, 6, -12) \sim \pi_2 = (-2, -3, 6)$ , los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son paralelos, por lo que contienen caras paralelas del cubo. El lado del cubo será por tanto la distancia entre las mismas.

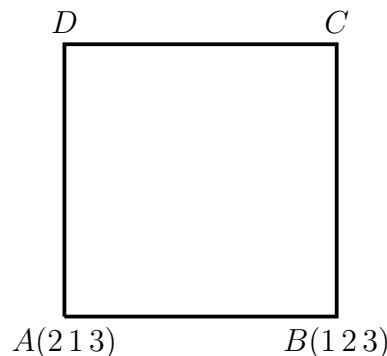
$$\ell = d(\pi_1, \pi_2) = d(P \in \pi_1, \pi_2)$$

Sea el punto  $P(-1/4, 0, 0) \in \pi_1$

$$\ell = d(P, \pi_2) = \frac{|-2 \cdot \frac{-1}{4} + 0 + 0 - 5|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{9/2}{7} = \frac{9}{14}$$

de esta forma el volumen del cubo será:  $V = \ell^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = 0,266 \text{ u}^3$

- El punto  $C \in \pi_4$ , siendo  $\pi_4$  el plano perpendicular al lado  $AB$  que pasa por el punto  $B$ .



$$\pi_4 \equiv \begin{cases} B(1, 2, 3) \\ \vec{n}_{\pi_4} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_4 \equiv -x + y + \lambda = 0$$

$$B \in \pi_4 \implies -1 + 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = -1 \implies \pi_4 \equiv -x + y - 1 = 0$$

$C \in \pi_2, \pi_3, \pi_4$ , luego se encuentra en la intersección de los tres planos:

$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_4 \equiv -x + y - 1 = 0 \end{cases} \sim F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \implies \begin{array}{l} x - 3 + 3 = 2 \implies x = 2 \\ -5y + 8 \cdot 3 = 9 \implies y = 3 \\ \implies z = 3 \end{array} \implies \boxed{C(2, 3, 3)}$$

Y para calcular  $D(a, b, c)$  tendremos en cuenta que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$(-1, 1, 0) = (2 - a, 3 - b, 3 - c) \implies \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{array} \implies \boxed{D(3, 2, 3)}$$

Otra opción habría sido la siguiente:

- $C \in r \equiv \pi_2 \cap \pi_3$ , que calcularíamos en paramétricas con un punto de la intersección y con  $\vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_2} \times \vec{n}_{\pi_3}$ .
- Como  $ABCD$  es un cuadrado  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \implies \lambda \implies C$ .
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \implies D$ .

\_\_\_\_\_○\_\_\_\_\_

HTTPS://APRENDECONMIGUELON.COM