Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ *y la recta* s *que pasa por el punto* $(2,-5,1)$ *y tiene dirección* $(-1,0,-1)$*, se pide:*

a) *Estudiar la posición relaiva de las dos rectas.*

b) *Calcular un plano que sea paralelo a* r *y contenga a* s*.*

c) *Calcular un plano perpendicular a la recta* r *y que pase por el origen de coordenadas.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,3,0) \\ \vec{d}_r = (2,-2,1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(2,-5,1) \\ \vec{d}_s = (-1,0,-1) \end{cases}$$

a) Como $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no son proporcionales entonces $r \nparallel s$.

$$\left[\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}$$

b)

$$\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{d}_r = (2,-2,1) \\ S(2,-5,1) \\ \vec{v} = \vec{d}_s = (-1,0,-1) \end{cases} \equiv \left[\overrightarrow{SX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(x-2) + (y+5) - 2(z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}$$

c) $$\beta \equiv \begin{cases} \beta \perp r \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{d}_r = (2,-2,1) \\ O(0,0,0) \in \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z + \lambda = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta \equiv 2x - 2y + z = 0}$$