

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
- b) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
- c) Calcular $\int_0^2 f(x) dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para estudiar la continuidad en el punto $x = 2$ tenemos que ver:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 8e^{2x-4} = 8$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 8$
- $f(2) = 8e^{2 \cdot 2 - 4} = 8$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Asíntotas horizontales:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 8e^{2x-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 8e^{-2x-4} = \frac{8}{\infty} = 0 \implies$ A. horiz. en $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = +\infty \implies \nexists$ A. horizontal

Asíntotas verticales:

- Si $x \leq 2$ no hay asíntota vertical
- Si $x > 2$ la asíntota vertical estaría en $x - 2 = 0 \implies x = 2$, pero $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} = 8 \neq \infty$, por tanto $\nexists$ A. Vertical.

c) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 8e^{2x-4} dx = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cdot e^{2x-4} dx = 4e^{2x-4} \Big|_0^2 = 4e^0 - 4e^{-4} = 4 - \frac{4}{e^4}$

_____ o _____