Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

a) *En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:* $m_1 = 0.92$, $m_2 = 0.94$, $m_3 = 0.89$, $m_4 = 0.90$, $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x *tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínimo. Es decir, el valor para el que la función* $E(x) = (x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + \cdots + (x-m_5)^2$ *alcanza el mínimo. Calcule dicho valor* x.

b) *Aplique el método de integración por partes para calcular* $\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx$, *donde* ln *significa logaritmo neperiano.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) El mínimo de la función $E(x)$ se produce en $E'(x) = 0$, por tanto:

$$\begin{gathered} E(x) = (x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + \cdots + (x-m_5)^2 \\ E'(x) = 2(x-m_1) + 2(x-m_2) + \cdots + 2(x-m_5) = 0 \\ \Longrightarrow\ 10x - 2(m_1 + \cdots + m_5) = 0 \ \Longrightarrow\ x = \frac{m_1 + \cdots + m_5}{5} \\ \Longrightarrow\ x = \frac{0.92 + 0.94 + 0.89 + 0.90 + 0.91}{5} \ \Longrightarrow\ \boxed{x = 0.912} \end{gathered}$$

que efectivamente es un mínimo pues $E''(x) = 10 > 0$ ($\cup$)

b) $$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right\} = \left.\frac{1}{3}x^3 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3} x^{\cancel{3}2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 \cancelto{0}{\ln 1}\right) - \left.\frac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right)$$
$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$$