Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$*, donde* $\ln$ *denota el logaritmo neperiano, definida para* $x > 0$*, se pide:*

a) *Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva* $y = f(x)$.

b) *Encontrar un punto de la curva* $y = f(x)$ *en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.*

c) *Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva* $y = f(x)$ *y las rectas* $y = 0$ *y* $x = e$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) La A. Horizontal será $y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln(x) = 0 \implies x = e$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot(1-\ln(x))}{x^4} \implies f''(e) = -\dfrac{1}{e^3} \neq 0 \implies x = e$ es un extremo relativo (Máximo) en el punto $(e, {}^1\!/_e)$

c) Hallamos el punto de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX

$\dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \ln(x) = 0 \implies x = 1$. De esta forma tenemos un único recinto de integración $A_1 = (1, e)$.

$$A_1 = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2\Big]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Area $= \dfrac{1}{2}\ u^2$

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM