

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

- Discutir el rango de la matriz A , en función de los valores del parámetro α .
- Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible A^{-1} .
- Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Como $\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran} A \geq 2$.

$$|A| = 490\alpha - 490 = 0 \implies \alpha = 1.$$

Por tanto:

- Si $\alpha = 1 \implies \text{ran} A = 2$
- Si $\alpha \neq 1 \implies \text{ran} A = 3$

b) Para $\alpha = 0$, $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $|A| = -490$. Hallamos A^{-1} por adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -20 & 15 & -21 \\ 40 & -30 & -56 \\ -70 & -70 & 98 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^T = -\frac{1}{490} \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

c) Resolvemos el sistema para $\alpha = 1$ por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array} \right) \sim C_1 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 37/2 \\ 5 & 4 & 3 & 11 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 14 & -14 & 35 \\ 0 & 8 & -8 & 20 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 1/7 F_2 \\ 1/4 F_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right) \sim F_3 - F_2 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \begin{array}{l} 10z + 14\lambda = 2 \\ 2y - 2\lambda = 5 \\ x = \lambda \end{array} \end{aligned}$$

$$\implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 5/2 + \lambda \\ z = 1/5 - 7/5\lambda \end{cases}$$

— o —