

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a .
 b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

- a) Vamos a estudiar el rango de la matriz A por el método de los determinantes y por el método de Gauss.

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) \geq 2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6 + 8 - (-4a + 3a + 4) = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$

Por tanto:

- Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \text{ran}(A) = 3$
- Si $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ y como $F_2 = -F_3 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$
- Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$

MÉTODO DE GAUSS

$$\begin{aligned} A = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 5 & a+4 & a-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a-3)F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^2+a-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

- Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \implies \text{ran}(A) = 3$
- Si $a = \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{ran}(A) = 2$

- b) Cuando $a = 0$ la matriz AM vale:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|AM| = -2 \implies \exists (AM)^{-1}$ que hallaremos por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } (AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AM)^{-1} = \frac{1}{|AM|} \text{Adj } (AM)^{\top} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

————— o —————

[HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM](https://aprendeconmigelon.com)