Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos

EVAU JUNIO 2017 (Coincidentes)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

30 de octubre de 2019

Junio 2017 (Coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $D = A^\top \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: $A^\top$ denota la matriz traspuesta de la matriz A.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $D = A^\top \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz $F = \underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B}$ sin embargo no existe pues no coinciden el número de columnas de A y el de filas de B.

b) $M = B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2;\ 2x - y \leq 4;\ 2y - x \leq 4;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

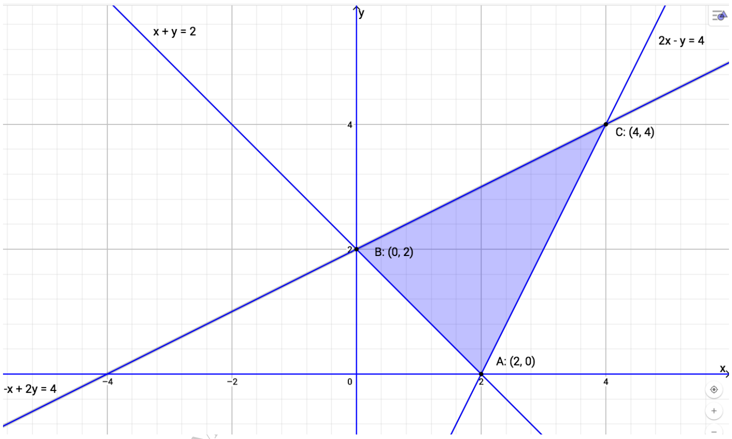
- `Función objetivo`

$$f(x, y) = -5x + 3y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} x + y \geq 2 & \to (0,2) \quad \& \quad (2,0) \\ 2x - y \leq 4 & \to (0,-4) \quad \& \quad (2,0) \\ 2y - x \leq 4 & \to (0,2) \quad \& \quad (-4,0) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	2	0	-10
B	0	2	6
C	4	4	-8

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $B(0,2)$ y vale 6, mientras que el *mínimo* se produce en $A(2,0)$ y vale -10.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

a) *Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y or las rectas $x = 0$ y $x = 3$.*

b) *Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

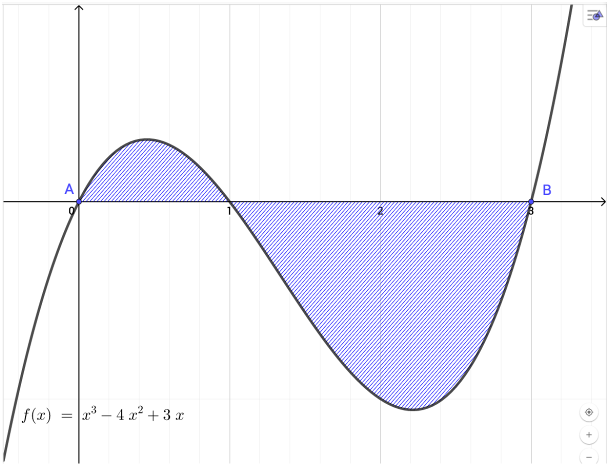
Solución.

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$

$= x(x-1)(x-3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

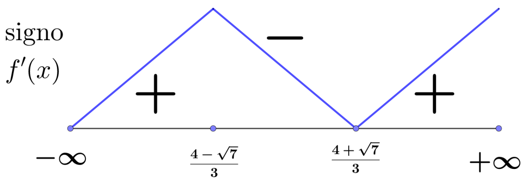
Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 3$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = -0$ y $x = 3$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 3)$.

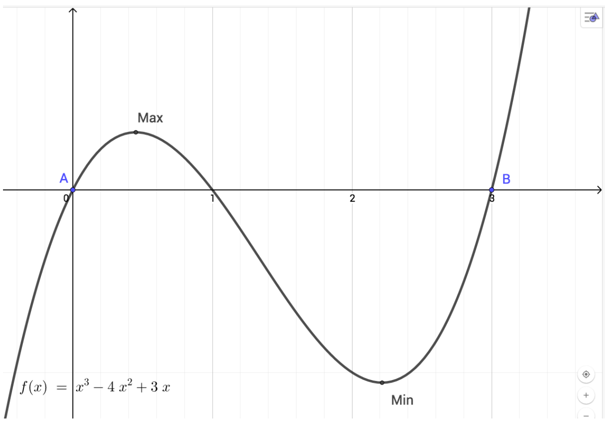


$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - (0) = \frac{5}{12}$$
$$A_2 = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$$
$$= \left(\frac{81}{4} - \frac{108}{3} + \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{12} - \frac{5}{12} = -\frac{8}{3}$$
$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del sigo de $f'(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$





Luego $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ y tiene un *máximo* en $x = \frac{4-\sqrt{7}}{3}$ y un *mínimo* en $x = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

El profesorado de cierta Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

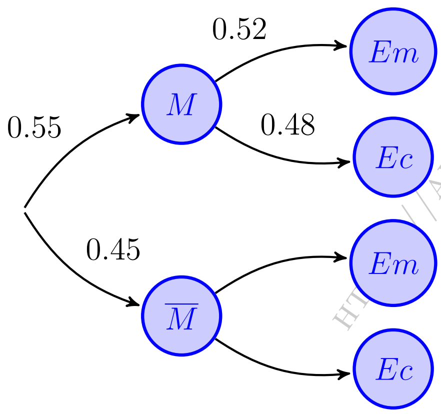
b) Sea de Economía y sea mujer.

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Junio - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} Ec &\equiv \text{El profesor es de Económía} \\ Em &\equiv \text{´´El profesor es de Empresa”} \\ M &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es mujer”} \\ H &\equiv \text{´´El miembro del profesorado es hombre”} \end{aligned}$$



Si utilizamos un esquema típico de *Probabilidad Total* tenemos las probabilidades del gráfico adjunto y además:

$$P(Em) = 0.4 \qquad \& \qquad P(Ec) = 0.6$$

a)

$$\begin{aligned} P(M \mid Em) &= \frac{P(M \cap Em)}{P(Em)} \\ &= \frac{P(M) \cdot P(Em \mid M)}{P(Em)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.52}{0.4} = 0.715 \end{aligned}$$

b) $P(Ec \cap M) = P(M \cap Ec) = P(M) \cdot P(Ec \mid M) = 0.55 \cdot 0.48 = 0.264$

Si bien es cierto que podríamos haber hecho lo mismo sin necesidad del esquema sin más que transcribir directamente lo que nos dicen en el enunciado, que quedaría como sigue:

$$P(Em) = 0.4 \qquad \& \qquad P(Ec) = 0.6 \qquad \& \qquad P(M) = 0.55 \qquad \& \qquad P(Em \mid M) = 0.52$$

De donde se deduciría que $P(Ec \mid M) = 1 - P(Em \mid M) = 1 - 0.52 = 0.48$ y el resto del proceso sería exactamente igual.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197.5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A - Coincidentes)

Solución.

a) $X:\ \mathcal{N}(\mu, 9) \qquad n=? \qquad 1-\alpha = 0.95$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

La amplitud del tintervalo ha de ser menor que 2, por lo que $2\varepsilon \leq 2$

$$2\varepsilon \leq 2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \leq 2$$

$$\implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{9}{2}\right)^2 = 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

b) $X:\ \mathcal{N}(202, 9) \xrightarrow{n=16} \overline{X}:\ \mathcal{N}(202, 9/\sqrt{16}) = \mathcal{N}(202, 2.25)$

$$P\left(\overline{X} \leq 197.5\right) = P\left(Z \leq \frac{197.5 - 202}{2.25}\right) = P(Z \leq -2)$$
$$= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Junio 2017 (Coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+3y+3z & = & 0 \\ -x+3y+z & = & 1 \\ -x+ay+2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

b) *Resuélvase para $a = 1$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \implies |A| = 6-2a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -x+3(1/4)+3(-1/2) = 0 \\ -2z = 1 \\ -2y-(-1/2) = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+5x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) Calcúles la ecuación de la recta tangente a la gráfica de lafunción $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) (1) Para que una función sea derivable ha de ser continua así que comprobamos primero la continuidad en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x+1\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(5x+1) = 1$
- $f(0) = 5\cdot 0 + 1 = 1$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$.

(2) Estudiemos la derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 5 \end{array}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) El punto de tangencia es $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = f(3) = 3^2 + 5\cdot 3 + 1 = 25$

$$\begin{gathered} f'(x) = 2x+5 \\ m_r = f'(x_0) = f'(3) = 11 \\ r \equiv y - y_0 = m_r\cdot(x - x_0) \\ r \equiv y - 25 = 11\cdot(x-3) \\ r \equiv y = 11x - 8 \end{gathered}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2 + 8x + 15$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int\left(x^2+8x+15\right)dx = \frac{x^3}{3}+4x^2+15x+k$

$f(1)=\dfrac{1}{3} \implies \dfrac{1}{3}+4+15+k=\dfrac{1}{3} \implies k=-19$

$$f(x)=\frac{x^3}{3}+4x^2+15x-19$$

b) $f'(x)=x^2+8x+15=0 \implies x=-3$ y $x=-5$

$f''(x)=2x+8 \implies \begin{cases} f''(-3)=2>0 & \Rightarrow (\cup) \Rightarrow \text{Minimo en } (-3,-37) \\ f''(-5)=-2<0 & \Rightarrow (\cap) \Rightarrow \text{Máximo en } (-5, {}^{-107}/_{3}) \end{cases}$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0.2, la probabilidad de que falle el B es de 0.3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0.015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) *Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.*

b) *No falle ninguno de los dos chips.*

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

Sean los sucesos: $\begin{cases} A & \equiv \text{Falla el chip A} \\ B & \equiv \text{Falla el chip B} \end{cases}$

$$P(A)=0.2 \quad \& \quad P(B)=0.3 \quad \& \quad P(A\cap B)=0.015$$

a) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.015}{0.3}=0.05$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$
$=1-(0.2+0.3-0.015)=0.515$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) *Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.*

b) *Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) $\quad X : \mathcal{N}(\mu, 25) \quad \overset{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} = 505$

$$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.005 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.995 \implies z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 20.36$$

$$I.C. = \overline{X} \pm \varepsilon = 505 \pm 20.36 = (484.64, 525.36)$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(500, 25) \quad \overset{n=10}{\longrightarrow} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(500, {}^{25}/_{\sqrt{10}}) = \mathcal{N}(500, 7.91)$

$$P\Big(10\overline{X} \geq 5030\Big) = P\Big(\overline{X} \geq 503\Big) = P\left(Z \geq \frac{503 - 500}{7.91}\right) = P(Z \geq 0.38)$$
$$= 1 - P(Z \leq 0.38) = 1 - 0.6480 = 0.3520$$