

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - my - z = 0 \\ mx - 4y + (6 - 2m)z = -8m \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}, \text{ se pide}$$

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m .

b) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -m^2 + 8m - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6 \end{cases}$$

■ Si $m \neq \{2, 6\}$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

■ Si $m = 2 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -16 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

■ Si $m = 6 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & -48 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

b) Resolvemos el sistema para $m = 6$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden

2 encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \end{array} \right) \sim F_2 - 6F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \lambda = 0 \\ 32y = -48 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda - 9 \\ y = -3/2, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

————— o —————

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM