Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 6x+2y+z & = & 1 \\ x+3y+z & = & 2 \\ 5x-y+az & = & -1 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *Resuélvase para $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 16a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\xrightarrow{\text{Rouché}}$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \; F_1 \leftrightarrow F_2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \; F_2 - 6F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x + 3 \cdot \frac{11-5\lambda}{16} + \lambda = 2 \\ -16y - 5\lambda = -9 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{21-11\lambda}{16} \\ y = \frac{11-5\lambda}{16} \\ z = \lambda \end{array}}$$