Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria X ("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) Justificar que la variable X se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Se trata de un experimento aleatorio en donde los resultados posibles son *acierto* y *fallo*, con probabilidad de 1/2 en cada caso. Se repite el experimento 300 veces, por lo tanto X es una binomial $\mathcal{B}(300; 0.5)$, en donde $n = 300$ y $p = 0.5 = q$. Como $np = 150 > 5$ y $nq = 150 > 5$ se puede aproximar por una normal

$$\mathcal{N}(np; \sqrt{npq}) \sim \mathcal{N}(150; 8.66)$$

b)
- La probabilidad $P(X' \leq 130) = P(X \leq 130.5)$ aplicando la aproximación por continuidad de Yates.

$$\begin{aligned} P(X \leq 130.5) &= P\Big(Z \leq \frac{130.5 - 150}{8.66}\Big) = P(Z \leq -2.25) = P(Z \geq 2.25) \\ &= 1 - P(Z \leq 2.25) = 1 - 0.9878 = 0.0122 \end{aligned}$$

- De igual manera $P(X' = 160) = P(159.5 \leq X \leq 160.5)$

$$\begin{aligned} P(159.5 \leq X \leq 160.5) &= P\Big(\frac{159.5 - 150}{8.66} \leq Z \leq \frac{160.5 - 150}{8.66}\Big) \\ &= P(1.10 \leq Z \leq 1.21) = P(Z \leq 1.21) - P(Z \leq 1.10) \\ &= 0.8869 - 0.8643 = 0.0226 \end{aligned}$$