Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados los puntos $A(1,2,-3)$, $B(1,5,0)$, $C(5,6,-1)$ y $D(4,-1,3)$, se pide:

a) Calcular el plano π que contiene a los puntos A, B, C y la distancia del punto D a dicho plano.

b) Calcular el volumen del tetraedro definido por los cuatro puntos dados.

c) Calcular el área del triángulo definido por A, B y C.

(Madrid - Matemáticas II - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) $\pi \in \begin{cases} A(1,2,-3) \\ B(1,5,0) \\ C(5,6,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(1,2,-3) \\ \overrightarrow{AB} = (0,3,3) \\ \overrightarrow{AC} = (4,4,2) \end{cases}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 2z - 9 = 0}$$

$$d(D,\pi) = \frac{|-4 + 2\cdot(-1) - 2\cdot 3 - 9|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{3} = 7\ u$$

b) $\overrightarrow{AD} = (3,-3,6)$

$$Vol_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{|-126|}{6} = 21\ u^3$$

c) $$Area_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot|(-6,12,.12)| = \frac{\sqrt{324}}{2} = 9\ u^2$$