Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 3m - 12 \neq 0 \implies m \neq 4$$

b) Para $m = 5$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A \cdot B + B$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot B + B)$$

$$X = \underbrace{A^{-1} A}_{I} \cdot B + A^{-1} \cdot B$$

$$X = B + A^{-1} \cdot B$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 8 & 13 & -12 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$