Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.

b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz cuadrada A tenga inversa el determinante ha de seer distinto de cero.

$$|A| = a^2 + 0 + 4 - (2a + 4 + 0) = a^2 - 2a = a \cdot (a-2) = 0 \implies \boxed{a = \{0, 2\}}$$

b) Para $a = 3$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, cuya inversa hallaremos por el método de los adjuntos.

$$|A| = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \qquad \& \qquad \text{Adj}\, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}\, A^\top = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \implies \underbrace{A^{-1} A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$