

# MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS EXÁMENES RESUELTOS

EVAU MODELO 2019

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

15 de septiembre de 2019



## Modelo 2019

### OPCIÓN A

#### Ejercicio 1 (2 puntos)

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $m$  es un parámetro real.

- Determinense los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  es invertible.
- Considérese la ecuación matricial  $A \cdot X = A \cdot B + B$ . Para  $m = 5$ , exprese  $X$  en función de  $A$  y  $B$  y calcúlese la matriz  $X$ .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A)

#### Solución.

- Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 3m - 12 \neq 0 \implies m \neq 4$$

- Para  $m = 5$  la matriz es  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es  $|A| = 3 \cdot 5 - 12 = 3$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= A \cdot B + B \\ \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X &= A^{-1} \cdot (A \cdot B + B) \\ X &= \underbrace{A^{-1} A}_I \cdot B + A^{-1} \cdot B \\ X &= B + A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Hallamos la matriz inversa de  $A$  por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -6 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si  $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = B + A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 13 & -5 & -7 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 8 & 13 & -12 \\ -3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

## Ejercicio 2 (2 puntos)

Sea  $S$  la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \leq 4; \quad 2x + y \geq 4; \quad 2x - y \leq 4.$$

- Represéntese la región  $S$  y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Obténganse los valores máximo y mínimo de la función  $f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$  en  $S$ , indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A )

**Solución.**

### ■ Función objetivo

$$f(x, y) = 0.5x + \frac{1}{3}y$$

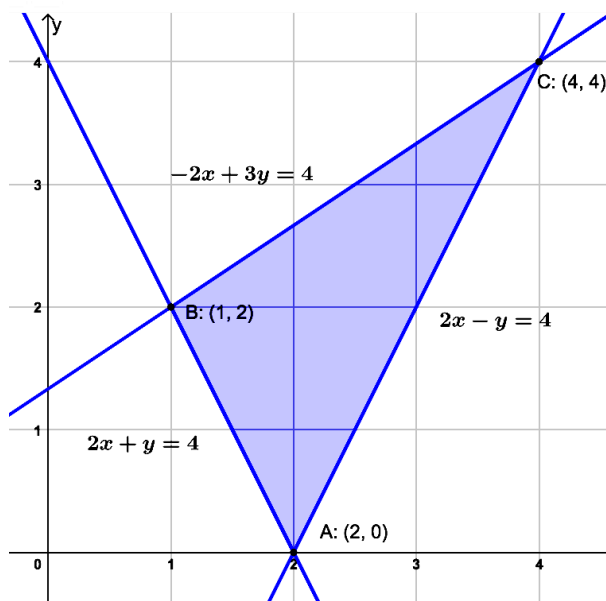
- **Restricciones** Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} \textcircled{1} & -2x + 3y \leq 4 & \rightarrow (0, 4/3) & \& & (-2, 0) \\ \textcircled{2} & 2x + y \geq 4 & \rightarrow (0, 4) & \& & (2, 0) \\ \textcircled{3} & 2x - y \leq 4 & \rightarrow (0, -4) & \& & (2, 0) \end{cases}$$

- **Región factible** Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- **Optimización de la función objetivo** Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	2	0	1
B	1	2	$\frac{7}{6}$
C	4	4	$\frac{10}{3}$



Luego la función objetivo tiene un *mínimo* en  $A(2,0)$ , que vale 1 y un *máximo* en  $C(4,4)$  que vale  $\frac{10}{3}$ .

### Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

- Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .
- Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A )

### Solución.

- El punto de tangencia es

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{2}$$

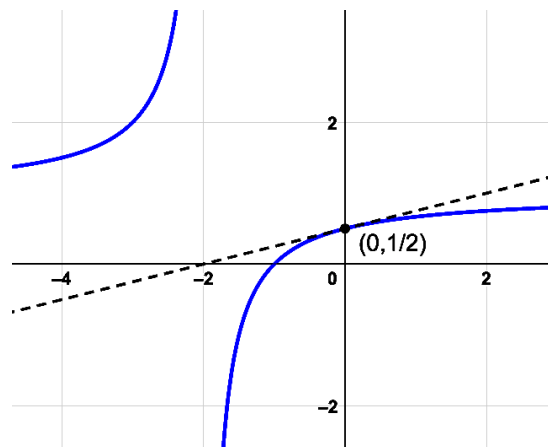
$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 + x - 2) - (x^2 - 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{4}$$

$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$

$$r \equiv y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (x - 0)$$

$$r \equiv x - 4y + 2 = 0$$



- **A.Horizontal**  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 1 \Rightarrow$  A.H. en  $y = 1$

- A. Vertical Hallamos las raíces del denominador:  $x^2 + x - 2 = 0 \implies x = \{-2, 1\}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \left[ \frac{3}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[ \frac{3}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left[ \frac{3}{0^-} \right] = -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \cdot \cancel{(x-1)}}{(x+2) \cdot \cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

Por tanto solo habrá A. Vertical en  $x = -2$ . En  $x = 1$  lo que tendremos será un "agujero", pues el punto no pertenece al dominio de definición de la función  $f(x)$ .

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

f

#### Ejercicio 4 (2 puntos)

En una determinada sede de la EVAU hay un 45 % de alumnos de la modalidad de Ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (MACCSSII). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen MACCSSII. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de MACCSSII. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

- Se examine de MACCSSII.
- Sabiendo que se examina de MACCSS sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A )

#### Solución.

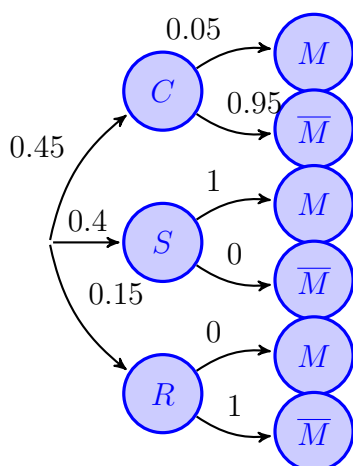
Sean los sucesos:

$C \equiv$  El alumno es de Ciencias

$S \equiv$  El alumno es de Ciencias Sociales

$R \equiv$  El alumno es del resto de modalidades

$M \equiv$  El alumno se examina de MACCSSII



$$\begin{aligned} \text{a) } P(M) &= P(C \cap M) + P(S \cap M) + P(R \cap M) \\ &= P(C) \cdot P(M | C) + P(S) \cdot P(M | S) \\ &\quad + P(R) \cdot P(M | R) = 0.45 \cdot 0.05 \\ &\quad + 0.4 \cdot 1 + 0.15 \cdot 0 = 0.4225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(C | M) &= \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C) \cdot P(M | C)}{P(M)} \\ &= \frac{0.45 \cdot 0.05}{0.4225} = 0.0533 \end{aligned}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 5 (2 puntos)

Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes,  $P$ , que estarían dispuestos a contratarlo.

- a) Asumiendo que la proporción poblacional es  $P = 0.5$ , Determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % ( $\pm 2\%$ ).
- b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción A )

### Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = \hat{p} \pm \varepsilon, \text{ siendo el error } \varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

- a) Hallar el mínimo  $n$  de tal forma que  $\varepsilon \leq 0.02$ , siendo  $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\varepsilon \leq 0.02 \implies z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq 0.02 \implies 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\implies n \geq \left( \frac{1.96 \cdot 0.5}{0.02} \right)^2 = 2401 \text{ y por tanto } \boxed{n = 2401 \text{ encuestados}}$$

- b)

$$\hat{p} = \frac{85}{500} = 0.17 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.83$$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.10 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$I.C. = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 0.17 \pm 1.645 \sqrt{\frac{0.17 \cdot 0.83}{500}} \implies \boxed{I.C. = (0.1424; 0.1976)}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

# 2019 Modelo

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\left. \begin{array}{rcl} 6x + 2y + z & = & 1 \\ x + 3y + z & = & 2 \\ 5x - y + az & = & -1 \end{array} \right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro  $a$ .

b) Resuélvase para  $a = 0$ .

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes  $A$ .

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & a & -1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 16a = 0 \Rightarrow a = 0$$

■ Si  $a \neq 0$   $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}} \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

■ Si  $a = 0 \Rightarrow A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \left| \begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \right| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^\circ \text{ incóg.} \xrightarrow{\text{Rouché}} \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)}$

b) Resolvemos el sistema para  $a = 0$  por el método de Gauss. Como estamos ante un S.C.I. solamente vamos a resolver las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión. Así:

$$A/A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim F_2 - 6F_1$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & -5 & -11 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 3 \cdot \frac{11-5\lambda}{16} + \lambda = 2 \\ -16y - 5\lambda = -9 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \frac{21-11\lambda}{16} \\ y = \frac{11-5\lambda}{16} \\ z = \lambda \end{array}}$$



## Ejercicio 2 (2 puntos)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ e^{2x+2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- a) *Determinése el valor del parámetro  $a \in \mathbb{R}$  para el cual  $f(x)$  es una función continua en  $x = -1$ .*
- b) *Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas  $x = 0$  y  $x = 1$  y la gráfica de  $f(x)$ .*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

- a) Estudiamos la continuidad de  $f(x)$  en  $x = -1$

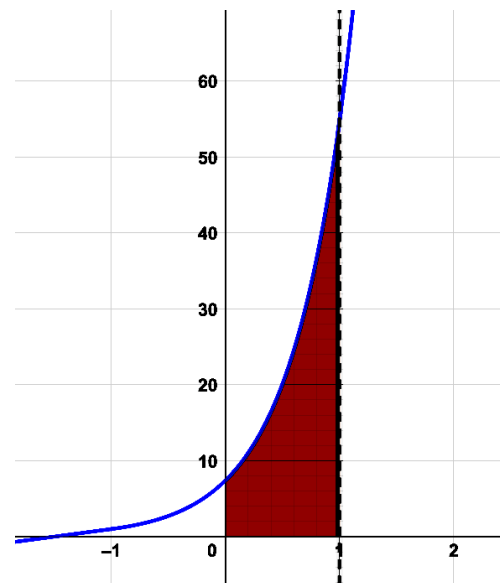
$$\left. \begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 2x + a = a - 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{2x+2} = 1 \\ \bullet f(-1) &= e^{2 \cdot (-1) + 2} = e^0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a - 2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

- b) Entre las rectas  $x = 0$  y  $x = 1$ , la función  $f(x) = e^{2x-2}$ . Calculamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Rightarrow e^{2x-2} = 0 \Rightarrow \nexists \text{ puntos de corte con eje X}$$

Por tanto se define un único intervalo de integración  $A_1 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 2e^{2x+2} dx = \frac{1}{2} e^{2x+2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} (e^2 - 1) \\ \text{Area} &= |A_1| = \left| \frac{e^2}{2} (e^2 - 1) \right| \\ &= \frac{e^2}{2} (e^2 - 1) \approx 23,6 \end{aligned}$$



\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

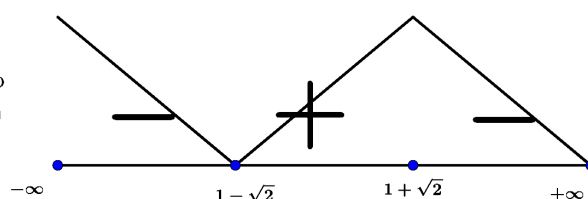
- a) *Determinense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
- b) *Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B )

#### Solución.

- a) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de  $f'(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \\ \Rightarrow x &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$



Luego la función  $f(x)$  es *decreciente* en  $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$  y *creciente* en  $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ .

- b) La función  $f(x)$  tiene un *mínimo local* en  $\left(1 - \sqrt{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  y un *máximo local* en  $\left(1 + \sqrt{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 4 (2 puntos)

Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0.2. La probabilidad de que, siendo extranjero, sea hombre es 0.45. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es 0.1. calcúlese la probabilidad de que:

- a) *Conocido que es español, sea un hombre.*
- b) *Sea una mujer.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B )

### Solución.

Sean los sucesos:

$H \equiv$  "El cliente es hombre"

$M \equiv$  "El cliente es mujer"

$E \equiv$  "El cliente es español"

En el enunciado nos dicen que:

$$P(E) = 0.2 \quad \& \quad P(H | \bar{E}) = 0.45 \quad \& \quad P(M \cap E) = 0.1$$

a) Hallar  $P(H | E)$

$$P(E) = P(M \cap E) + P(H \cap E) \implies 0.2 = 0.1 + P(H \cap E) \implies P(H \cap E) = 0.1$$

$$P(H | E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{0.1}{0.2} \implies \boxed{P(H | E) = 0.5}$$

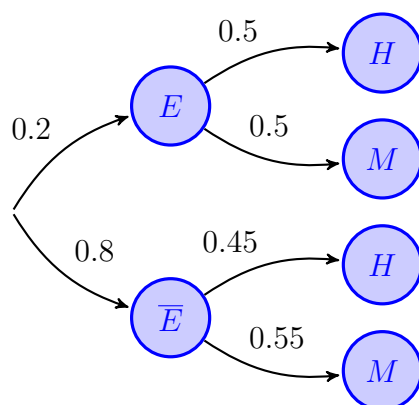
También lo podríamos haber planteado de esta manera:

$$P(M | E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5 \implies P(H | E) = 1 - 0.5 = 0.5$$

b) Hallar  $P(M)$

$$P(H | \bar{E}) = \frac{P(M \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(M) - P(M \cap E)}{1 - P(E)} \implies 0.45 = \frac{P(M) - 0.1}{1 - 0.2}$$
$$\implies P(H | \bar{E}) = 0.46 \implies \boxed{P(M) = 0.54}$$

Pero este apartado es, sin duda más fácil hacerlo dibujando el esquema:



$$\begin{aligned} P(M) &= P(E \cap M) + P(\bar{E} \cap M) \\ &= P(E) \cdot P(M | E) + P(\bar{E}) \cdot P(M | \bar{E}) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.8 \cdot 0.55 \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_

### Ejercicio 5 (2 puntos)

El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media  $\mu$  kg y desviación típica  $\sigma = 0.1$  kg.

- a) *Determinése el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de  $\mu$  sea menor que 0.025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.*
- b) *Sabiendo que  $\mu = 0.7$  kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0.65 kg.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2019 - Opción B)

### Solución.

Llamamos  $X \equiv$  "Contenido en azúcares en los botes de miel (kg)"

- a) Hallar el mínimo  $n$  de tal forma que  $\varepsilon \leq 0.025$ , siendo  $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \xrightarrow{\text{Tabla}} z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\varepsilon < 0.025 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.025 \implies 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} \leq 0.025$$

$$\implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.1}{0.025}\right)^2 = 61.46 \text{ y por tanto } \boxed{n = 62}$$

$$\text{b) } X : \mathcal{N}(0.7, 0.1) \xrightarrow{n=20} \bar{X} : \mathcal{N}\left(0.7; \frac{0.1}{\sqrt{20}} = 0.022\right)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 0.65) &= P\left(Z \leq \frac{0.65 - 0.7}{0.022}\right) = P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 2.24) \\ &= 1 - P(Z \leq 2.27) = 1 - 0.9875 = 0.0125 \end{aligned}$$

\_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_