

MATEMÁTICAS II
EXÁMENES RESUELTOS
PAU Y EVAU

JULIO 2019 - EXTRAORDINARIO

[HTTPS://APRENDECOMIGOMELON.COM](https://aprendecomigomelon.com)
Iñigo Zunzunegui Monterrubio

20 de agosto de 2019

2019 Julio (Extraordinario)

OPCIÓN A

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0 \\ -x + ky - z = 0 \\ (k-1)x - y = -(k+1) \end{cases}, \text{ se pide:}$$

- a) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k .
 b) Resolver el sistema para $k = -1$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

- a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = -(k+1) \cdot (k-1) + 1 - [k \cdot (k-1) + 0 + k] = -2k^2 + 2 = 0 \implies k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \implies$
 SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $k = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $k = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

2) Método Gauss

$$\begin{aligned}
 A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right) \sim C_1 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & -(k+1) \end{array} \right) \\
 &\sim F_2 + F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ 0 & 2k+1 & k-1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & -(k+1) \end{array} \right) \sim (2k+1) \cdot F_3 + F_2 \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k+1 & k & 0 \\ 0 & 2k+1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k^2-2 & -2k^2-3k-1 \end{array} \right) \implies 2k^2-2=0 \implies k=\pm 1
 \end{aligned}$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $k = -1 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)
- Si $k = 1 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \square \end{array} \right) \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $k = -1$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$\begin{aligned}
 A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim F_2 - F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
 &\implies \begin{cases} -x + \lambda = 0 \\ -y - 2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \implies \boxed{\begin{matrix} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{matrix}, \lambda \in \mathbb{R}}
 \end{aligned}$$

o

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

a) Sean f, g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1 \quad \& \quad f'(1) = 2 \quad \& \quad g(1) = 3 \quad \& \quad g'(1) = 4$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) Calcule la integral $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \sin x$).

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

$$h(x) = f((x+1)^2) \implies h'(x) = f'((x+1)^2) \cdot 2 \cdot (x+1)$$

a) $h'(0) = f'(1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \implies k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$$

b) $\int (\sin x)^4 (\cos x)^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \implies \cos^2 x = 1 - t^2 \\ dt = \cos x dx \implies dx = \frac{1}{\cos x} dt \end{array} \right\}$

$$= \int \underbrace{t^4}_{\sin^4 x} \cdot \underbrace{(1-t^2)}_{\cos^2 x} \cdot \underbrace{\cos x}_{\frac{1}{dx}} \cdot \frac{1}{\cos x} dt$$
$$= \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

o

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, 3, -3)$ y $C(-3, -1, 1)$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) Obtener un punto D (distinto de A , B y C) tal que los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} sean linealmente dependientes.

c) Obtener un punto P del eje OX , de modo que el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P sea igual a 1.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Hallamos el plano π que pasa por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AX} = (x-1, y-1, z-1) \\ \overrightarrow{AB} = (0, 2, -4) \\ \overrightarrow{AC} = (-4, -2, 0) \end{array} \right\} \implies \pi \equiv [\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$
$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \implies \pi \equiv -8(x-1) + 16(y-1) + 8(z-1) = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -x + 2y + z - 2 = 0}$$

b) Para que los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} y \overrightarrow{AD} sean linealmente dependientes el producto mixto $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$. Por lo tanto cualquier punto del plano π nos vale, por ejemplo $D(-2, 0, 0)$.

c) Un punto $P \in OX$ es de la forma $P(a, 0, 0)$.

$$\frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AP}]| = 1 \implies \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ a-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-16 - 8a| = 6$$

$$\begin{cases} -16 - 8a = 6 \implies a = -11/4 \implies \boxed{P_1(-11/4, 0, 0)} \\ -16 - 8a = -6 \implies a = -5/4 \implies \boxed{P_2(-5/4, 0, 0)} \end{cases}$$

————— o —————

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

- a) Se sabe que el 40% del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.
- b) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X , de media 5.6 y desviación típica σ . Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ .

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Sea $X \equiv N^\circ$ de aspirantes seleccionados. Entonces $X : \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}(8, 0.4)$, luego:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^8 + \binom{8}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^7 \right] = 1 - (0.0168 + 0.0896) = 0.8936 \end{aligned}$$

b) Sea ahora $X \equiv$ Puntuaciones obtenidas por el aspirante. La variable X sigue una distribución: $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma) = \mathcal{N}(5.6, \sigma)$

$$P(X \leq 8.2) = 0.67 \implies P\left(Z \leq \frac{8.2 - 5.6}{\sigma}\right) = 0.67 \xrightarrow{\text{Tabla}} \frac{2.6}{\sigma} = 0.44 \implies \boxed{\sigma = 5.91}$$

————— o —————

2019 Julio (Extraordinario)

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2.5 puntos)

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
- Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla cuando sea posible, en función del parámetro a .
- Calcular, en función de a , el determinante de la matriz $(AA^T)^2$, donde A^T denota la matriz traspuesta de A .

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

- a) Hallamos $a \in \mathbb{R}$ de manera que $A^2 - I = 2A$

$$\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (1-a)^2 & 2 \\ 2 & (1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 2-2a \Rightarrow a = \pm 1 \\ (1+a)^2 = 2+2a \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

- b) Una matriz A tiene inversa si es cuadrada y $|A| \neq 0$
 $|A| = (1-a) \cdot (1+a) - 1 = -a^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-a^2} \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

- c) $\left| (AA^T)^2 \right| = |AA^T|^2 = (|A| \cdot |A^T|)^2 = (|A| \cdot |A|)^2 = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$

_____ o _____

Ejercicio 2 (2.5 puntos)

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2 \cdot (10 - t)$.

- Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.
- Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.
- Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} F'(t) = t^2 \cdot (10 - t) = 10t^2 - t^3 &\implies F(t) = \int F'(t) dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C \\ F(0) = 6 &\implies C = 6 \end{aligned} \right\}$$

$$F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6$$

b) Calculamos los puntos singulares: $F'(t) = 0 \implies t^2 \cdot (10 - t) = 0 \implies t = \{0, 10\}$

$$F''(t) = 20t - 3t^2 \implies \begin{cases} F''(0) = 0 \implies \text{Pto. Inflexión} \\ F''(10) = -100 < 0 \stackrel{(n)}{\implies} \text{Máximo en } t = 10 \implies F(10) = 839.33 \end{cases}$$

c) $F(t)$ es una función continua en \mathbb{R} que cumple:

$$\begin{aligned} F(10) = 839.3 &\quad \& \quad F(11) = 782.4 &\quad \& \quad F(12) = 582 \\ F(13) = 189.1 &\quad \& \quad F(14) = -451.3 \end{aligned}$$

Luego por el *Teorema de Bolzano* $\exists c \in (13, 14) \mid F(c) = 0$, lo que quiere decir que entre los días 13 y 14 el brote de la enfermedad terminará.

o

Ejercicio 3 (2.5 puntos)

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad y$
 $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

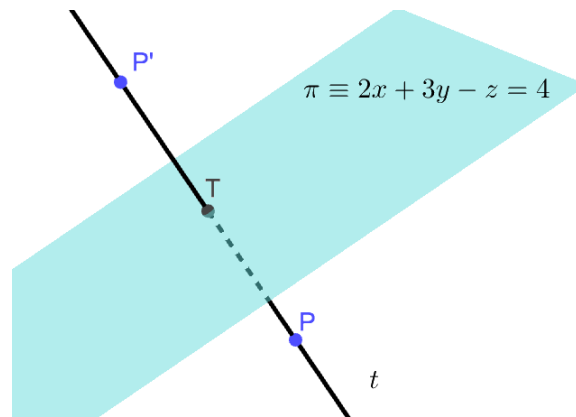
- Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π .
- Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π , que pasa por el punto intersección de las rectas r y s .
- Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s .

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

Solución.

$$a) t \equiv \begin{cases} P(1, 2, 3) \\ t \perp \pi \implies \vec{d}_t = \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

$$T \equiv t \cap \pi \implies 2 \cdot (1 + 2\lambda) + 3 \cdot (2 + 3\lambda) - (3 - \lambda) = 4 \implies \lambda = -1/14, \text{ por lo que} \\ T(6/7, 25/14, 43/14)$$



La ecuación vectorial del punto T será: $\vec{t} = \vec{p} + \overrightarrow{PT} = \vec{p} + \lambda \vec{d}_t$

$$\vec{p}' = \vec{p} + \overrightarrow{PP'} = \vec{p} + 2\overrightarrow{PT} = \vec{p} + 2\lambda \vec{d}_t = (1, 2, 3) - \frac{2}{14} \cdot (2, 3, -1) \Rightarrow \boxed{P'\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)}$$

b) La recta m pedida será:

$$m \equiv \begin{cases} m \perp \pi \implies \vec{d}_m = \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \\ M = r \cap s \implies \begin{cases} (1 + \lambda) + 2 - (3 + \lambda) = 0 \implies 0 = 0 \\ (1 + \lambda) + 2 + (3 + \lambda) = 2 \implies \lambda = -2 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 2, 1) \end{cases}$$

Luego la ec. vectorial de la recta $m \equiv (x, y, z) = (-1, 2, 1) + \lambda(2, 3, -1)$

$$c) \quad \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -2, 0) \implies |\vec{d}_r| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{d}_s = (1, 0, 1) \implies |\vec{d}_s| = \sqrt{2}$$

$$\cos(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| \cdot |\vec{d}_s|} = \frac{|2 + 0 + 0|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\widehat{r, s} = 60^\circ}$$

_____ o _____

Ejercicio 4 (2.5 puntos)

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama $1/3$ de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es el 1.6%, mientras que para los de alta gama es del 0.9%. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

- Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.
- Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2019 - Opción B)

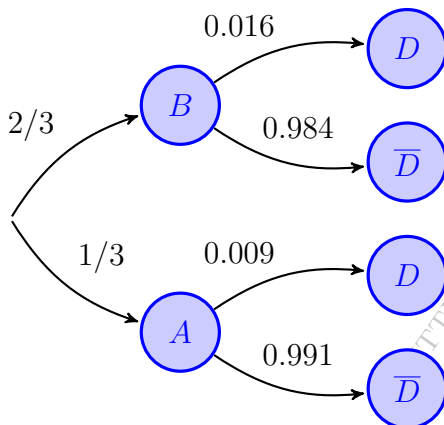
Solución.

Sean los sucesos:

$B \equiv$ El vehículo es de baja gama

$A \equiv$ El vehículo es de alta gama

$D \equiv$ El vehículo es defectuoso



$$\begin{aligned} \text{a) } P(D) &\equiv P(B \cap D) + P(A \cap D) \\ &= P(B) \cdot P(D | B) + P(A) \cdot P(D | A) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0.016 + \frac{1}{3} \cdot 0.009 \\ &= 0.0137 \simeq 1.37\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(B | D) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D | B)}{P(D)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.016}{0.0137} = 0.7785 \simeq 78\% \end{aligned}$$

o