Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JUNIO 2018 - Ordinario

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

4 de junio de 2019

2018 Junio
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array}\right) \implies |A| = m^2 - 1 = 0 \implies m = \pm 1$$

- Si $m \neq \{-1, 1\}$ $|A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m = -1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $m = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 2$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 = \operatorname{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $m = 0$ por el método de Gauss. Como $m \neq \{-1, 1\}$ estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x = 1 \\ -y + 0 = 1 \\ z = 0 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

a) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$, $m_2 = 0.94$, $m_3 = 0.89$, $m_4 = 0.90$, $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínimo. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) Aplique el método de integración por partes para calcular $\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx$, donde ln *significa logaritmo neperiano.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) El mínimo de la función $E(x)$ se produce en $E'(x) = 0$, por tanto:

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$$
$$E'(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + \cdots + 2(x - m_5) = 0$$
$$\Longrightarrow\ 10x - 2(m_1 + \cdots + m_5) = 0 \Longrightarrow\ x = \frac{m_1 + \cdots + m_5}{5}$$
$$\Longrightarrow\ x = \frac{0.92 + 0.94 + 0.89 + 0.90 + 0.91}{5} \Longrightarrow \boxed{x = 0.912}$$

que efectivamente es un mínimo pues $E''(x) = 10 > 0$ ($\cup$)

b) $$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right\} = \left. \frac{1}{3}x^3 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^{\cancel{3}2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 \ln 2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 \cancel{\ln 1}^{\,0}\right) - \left. \frac{1}{9}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right)$$
$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

> *Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:*
>
> *a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.*
>
> *b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)*

Solución.

a) Dado que $\pi_1 = (4, 6, -12) \sim \pi_2 = (-2, -3, 6)$, los planos π_1 y π_2 son paralelos, por lo que contienen caras paralelas del cubo. El lado del cubo será por tanto la distancia entre las mismas.

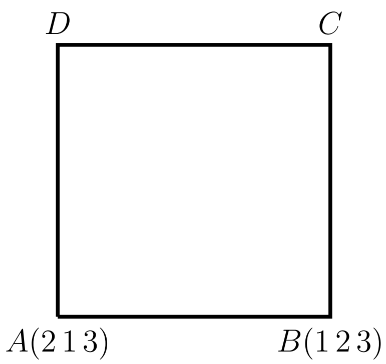
$$\ell = d(\pi_1, \pi_2) = d(P \in \pi_1, \pi_2)$$

Sea el punto $P(-1/4, 0, 0) \in \pi_1$

$$\ell = d(P, \pi_1) = \frac{\left|-2 \cdot \frac{-1}{4} + 0 + 0 - 5\right|}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{9/2}{7} = \frac{9}{14}$$

de esta forma el volumen del cubo será: $V = \ell^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = 0,266\ u^2$

b) El punto $C \in \pi_4$, siendo π_4 el plano perpendicular al lado AB que pasa por el punto B.



$$\pi_4 \equiv \begin{cases} B(1,2,3) \\ \vec{n}_{\pi_4} = \overrightarrow{AB} = (-1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_4 \equiv -x + y + \lambda = 0$$

$$B \in \pi_4 \Longrightarrow -1 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow \pi_4 \equiv -x + y - 1 = 0$$

$C \in \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4$, luego se encuentra en la intersección de los tres planos:

$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z = 2 \\ \pi_4 \equiv -x + y - 1 = 0 \end{cases} \sim F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{rl} x - 3 + 3 = 2 & \Rightarrow\ x = 2 \\ -5y + 8 \cdot 3 = 9 & \Rightarrow\ y = 3 \\ & \Rightarrow\ z = 3 \end{array} \Longrightarrow \boxed{C(2,3,3)}$$

Y para calcular $D(a,b,c)$ tendremos en cuenta que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$(-1,1,0) = (2-a, 3-b, 3-c) \Longrightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{array} \Longrightarrow \boxed{D(3,2,3)}$$

Otra opción habría sido la siguiente:

- $C \in r \equiv \pi_2 \cap \pi_3$, que calcularíamos en paramétricas con un punto de la intersección y con $\vec{d}_r = \vec{n}_{\pi_2} \times \vec{n}_{\pi_3}$.
- Como $ABCD$ es un cuadrado $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \lambda \Longrightarrow C$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Longrightarrow D$.

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los arícuos han sido adqurirdos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

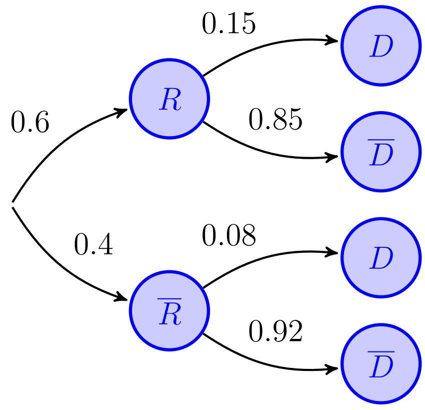
b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Sean los sucesos:

$$R \equiv \text{"El artículo tiene precio rebajado"}$$
$$D \equiv \text{"El cliente devuelve el artículo"}$$



$$\begin{aligned} P(D) &= P(R \cap D) + P(\overline{R} \cap D) \\ &= P(R) \cdot P(D \mid R) + P(\overline{R}) \cdot P(D \mid \overline{R}) \\ &= 0.6 \cdot 015 + 0.4 \cdot 0.08 = 0.122 = 12.2\,\% \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(R \mid D) &= \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{P(R) \cdot P(D \mid R)}{P(D)} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.122} = 0.737 = 73.7\,\% \end{aligned}$$

2018 Junio
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, se pide:*

a) Obtener los valores del parámetro m *para los que la matriz* A *admite inversa.*

b) Para $m = 0$*, calcular* $A \cdot B$ *y* $A^{-1} \cdot B$*.*

c) Calcular $B \cdot B^\top$ *y* $B^\top \cdot B$*, donde* $B^\top$ *denota la matriz traspuesta de* B*.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 4 \neq 0 \implies m \neq -2$$

b) Para $m = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = -0^2 - 4 \cdot 0 - 4 = -4$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^\top = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $B \cdot B^\top = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^\top \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, *se pide:*

a) *Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de* $f(x)$.

b) *Calcular* $f'(4)$.

c) *Hallar el área del recinto limitado por la curva* $y = f(x)$, *el eje* OX *y las rectas* $x = -1$ *y* $x = 1$

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Reescribimos la función $f(x)$ quitando el valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{(-x)^2+9}} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1$

b) Cuando $x = 4$ la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9} - x \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \Longrightarrow f'(4) = \frac{\sqrt{4^2+9} - \dfrac{4^2}{\sqrt{4^2+9}}}{4^2+9} = \frac{9}{125}$$

c) El punto de corte de $f(x)$, con el eje OX es $x = 0$, por lo que tenemos dos recintos de integración, el $A_1 = [-1, 0]$ y el $A_2 = [0, 1]$.

$$A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_{-1}^{0} -x \cdot \left(x^2+9\right)^{-1/2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2x \cdot \left(x^2+9\right)^{-1/2}\,dx = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{x^2+9}\Big]_{-1}^{0} = -3 - (-\sqrt{10}) = -3 + \sqrt{10}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \sqrt{x^2+9}\Big]_{0}^{1} = \sqrt{10} - 3$$

$$\text{Area} = |A_1| + |A_2| = 2\left(\sqrt{10} - 3\right) \simeq 2\sqrt{10} - 6\ u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el punto $P(1,1,1)$ *y las rectas* $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, *se pide:*

a) *Hallar la distancia del punto* P *a la recta* r.

b) *Estudiar la posición relativa de las rectas* r *y* s.

c) *Hallar el plano perpendicular a la recta* s *y que pasa por el punto* P.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,0,1) \\ \vec{d_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-5) \end{cases} \quad \& \quad s \equiv \begin{cases} S(2,-1,1) \\ \vec{d_s} = (-1,1,1/3) \sim (-3,3,1) \end{cases}$$

a) $$\begin{cases} \overrightarrow{PR} = (0,-1,0) \\ \vec{d_r} = \sqrt{30} \end{cases} \quad \& \quad \left|\overrightarrow{PR} \times \vec{d_r}\right| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \right\| = |(5,0,1)| = \sqrt{26}$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{d_r}\right|}{\left|\vec{d_r}\right|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}\, u$$

b) Como los vectores $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ no son proporcionales entonces $r \nparallel s$

$$\left[\overrightarrow{RS}, \vec{d_r}, \vec{d_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{las rectas } r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

c) El plano π pedido pasa por P y es perpendicular a s.

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,1,1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d_s} = (-3,3,1) \end{cases} \implies \pi \equiv -3x+3y+z+\lambda = 0$$

$$P \in \pi \implies -3+3+1+\lambda = 0 \implies \lambda = -1 \implies \boxed{\pi \equiv -3x+3y+z-1=0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

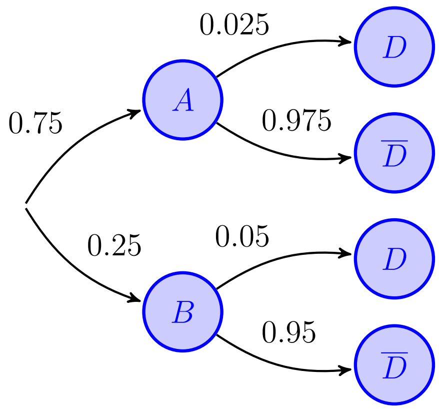
En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El $75\,\%$ de los productos fabricados son de tipo A y el $25\,\%$ de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un $5\,\%$ de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un $2.5\,\%$ de las veces.

a) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2018 - Opción B)

Solución.



a) Sean los sucesos:

$A \equiv$ "El producto es de tipo A"
$B \equiv$ "El producto es de tipo B"
$D \equiv$ "El producto es defectuoso"

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A\cap D)+P(B\cap D)\\ &= P(A)\cdot P(D\mid A)+P(B)\cdot P(D\mid B)\\ &= 0.75\cdot 0.025+0.25\cdot 0.05 = 0.03125 \end{aligned}$$

$5000\cdot 0.03125 \simeq 157$ productos defectuosos

b) Ahora solo se fabrica un tipo de producto, que puede ser defectuoso o no. El número de productos defectuosos X se distribuye como una variable binomial $\mathcal{B}(6000, 0.025)$. Para poder aproximar la variable X a una normal tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} np = 6000\cdot 0.025 = 150 > 5 \checkmark \\ nq = 6000\cdot 0.975 = 5850 > 5 \checkmark \end{cases} \implies \widetilde{X}:\mathcal{N}(np,\sqrt{npq}) = \mathcal{N}(150, 12.09)$$

Aplicando la corrección por continuidad de Yates.

$$\begin{aligned} P(X>160) &= P(\widetilde{X}\geq 160.5) = P\left(Z\geq \frac{160.5-150}{12.09}\right) = P(Z\geq 0.87)\\ &= 1-P(Z\leq 0.87) = 1-0.8078 = 0.1922 \end{aligned}$$