Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JUNIO 2019 - Ordinario

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

28 de junio de 2019

2019 Junio
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ *y* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *se pide:*

a) *Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.*

b) *Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Vamos a estudiar el rango de la matriz A por el método de los determinantes y por el método de Gauss.

Método de los determinantes

- Como $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) \geq 2$
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 - 6 + 8 - (-4a + 3a + 4) = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$

Por tanto:
∘ Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
∘ Si $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ y como $F_2 = -F_3 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$
∘ Si $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y como $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) = 2$

Método de Gauss

$$\text{A} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 5 & a+4 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \\ \\ (a-3)F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & a-3 & -2 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \implies a = \{-2, 1\}$$

∘ Si $a \neq \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \implies \operatorname{ran}(A) = 3$
∘ Si $a = \{-2, 1\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

b) Cuando $a=0$ la matriz AM vale:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|AM| = -2 \Longrightarrow \exists (AM)^{-1}$ que hallaremos por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } (AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(AM)^{-1} = \frac{1}{|AM|}\text{Adj } (AM)^{\top} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x>0$, se pide:

a) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$.

b) Encontrar un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) La A. Horizontal será $y = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1-\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = e$

$f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\cdot(1-\ln(x))}{x^4} \Longrightarrow f''(e) = -\dfrac{1}{e^3} \neq 0 \Longrightarrow x = e$ es un extremo relativo (Máximo) en el punto $(e, {}^1\!/_e)$

c) Hallamos el punto de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX $\dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$. De esta forma tenemos un único recinto de integración $A_1 = (1,e)$.

$$A_1 = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2\Big]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\,u^2$$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ *y la recta* s *que pasa por el punto* $(2,-5,1)$ *y tiene dirección* $(-1,0,-1)$, *se pide:*

a) Estudiar la posición relaiva de las dos rectas.

b) Calcular un plano que sea paralelo a r *y contenga a* s.

c) Calcular un plano perpendicular a la recta r *y que pase por el origen de coordenadas.*

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

$$r \equiv \begin{cases} R(1,3,0) \\ \vec{d_r} = (2,-2,1) \end{cases} \qquad \& \qquad s \equiv \begin{cases} S(2,-5,1) \\ \vec{d_s} = (-1,0,-1) \end{cases}$$

a) Como $\vec{d_r}$ y $\vec{d_s}$ no son proporcionales entonces $r \nparallel s$.

$$\left[\vec{d_r}, \vec{d_s}, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan en el espacio.}$$

b)

$$\pi \equiv \begin{cases} \pi \parallel r \\ s \in \pi \end{cases} \equiv \begin{cases} \vec{u} = \vec{d_r} = (2,-2,1) \\ S(2,-5,1) \\ \vec{v} = \vec{d_s} = (-1,0,-1) \end{cases} \equiv \left[\overrightarrow{SX}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(x-2) + (y+5) - 2(z-1) = 0 \implies \boxed{\pi \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}$$

c) $$\beta \equiv \begin{cases} \beta \perp r \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{d_r} = (2,-2,1) \\ O(0,0,0) \in \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z + \lambda = 0 \\ 0+0+0+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\beta \equiv 2x - 2y + z = 0}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción A)

Solución.

a) Sea $X \equiv$ "Nº de peces que sobreviven al quinto año", así $X : \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(10, 0.1)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] = 1 - 0.736 = 0.264 \end{aligned}$$

b) $X : \mathcal{B}(200, 0.1) \begin{cases} np = 200 \cdot 0.1 = 20 > 5 \checkmark \\ nq = 200 \cdot 0.9 = 180 > 5 \checkmark \end{cases} \xrightarrow{Yates} \widetilde{X} : \mathcal{N}(np, \sqrt{npq}) = \mathcal{N}(20, 4.24)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(\widetilde{X} \geq 9.5) = P\left(Z \geq \frac{9.5 - 20}{4.24}\right) = P(Z \geq -2.48) \\ &= P(Z \leq 2.48) = 0.9934 \end{aligned}$$

2019 Junio

Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

Sean las incógnitas:

$$\begin{aligned} x &\equiv \text{"Precio de un bocadillo (€)"} \\ y &\equiv \text{"Precio de un refresco (€)"} \\ z &\equiv \text{"Precio de una bolsa de patatas (€)"} \end{aligned}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y={}^{3}\!/_{0.6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim F_1 \leftrightarrow F_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

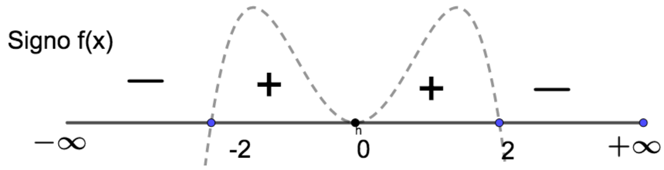
$$\underset{F_3-F_2}{\sim} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x+2=5 \\ -y+1=-1 \\ z=1 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

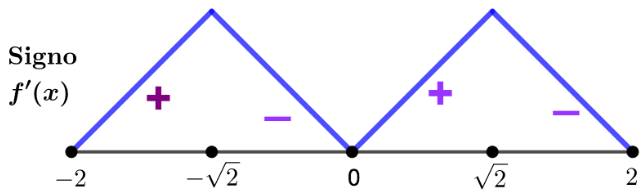
> *Dada la función* $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, *se pide:*
>
> a) *Determinar su dominio.*
>
> b) *Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.*
>
> c) *Calcular los límites laterales* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)*

Solución.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$
$4x^2 - x^4 \geq 0$
$-x^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2) \geq 0$
$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-2, 2)\}$



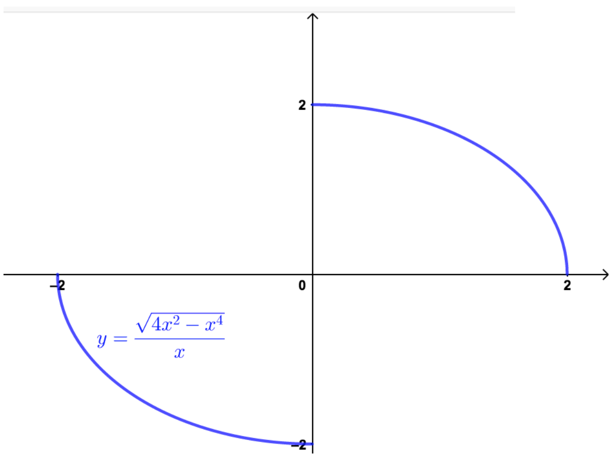
b) $f'(x) = \dfrac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0$
$8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow x \cdot (8 - 4x^2) = 0$
$-4x \cdot \left(x - \sqrt{2}\right) \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) = 0$
$x = \left\{0, \pm\sqrt{2}\right\}$



$f(x)$ es *creciente* en $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ y *decreciente* en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y tiene *máximos* en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$

c) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\sqrt{4 - x^2}}{\cancel{x}} = 2$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.

a) $d(A,\pi) = \dfrac{|2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \dfrac{|-29|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}\ u$

b) Piden hallar $B \in \pi$ de forma que $d(A,B)_{min} = \sqrt{29}$, es decir, $B \in r \mid r \perp \pi$ & $A \in r$.

$$r \equiv \begin{cases} A(2,1,0) \\ \vec{d_r} = \vec{n}_\pi = (2,3,4) \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \Longrightarrow B(2+2\lambda, 1+3\lambda, 4\lambda)$$

$$d(A,B) = |(2\lambda,3\lambda,4\lambda)| = \sqrt{(2\lambda)^2+(3\lambda)^2+(4\lambda)^2} = \sqrt{29\lambda^2} = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

- Si $\lambda = -1 \Longrightarrow B(0,-2,-4) \Longrightarrow 2\cdot 0+3\cdot(-2)+4\cdot(-4) = -22 \neq 36 \notin \pi$
- Si $\lambda = 1 \Longrightarrow B(4,4,4) \Longrightarrow 2\cdot 4+3\cdot 4+4\cdot 4 = 36$ ✓

por tanto el punto buscado es:

$$\boxed{B(4,4,4)}$$

Otra opción habría sido hallar $r \perp \pi \quad \& \quad r \in A$ y luego hallar el punto $B = r \cap \pi$

c) El punto $A'(a,b,c)$, simétrico de A respecto al plano π, es tal que B es el punto medio de A y A'

$$B = \frac{1}{2}(A+A') \Longrightarrow A' = 2B - A = 2(4,4,4)-(2,1,0) \Longrightarrow \boxed{A'(6,7,8)}$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

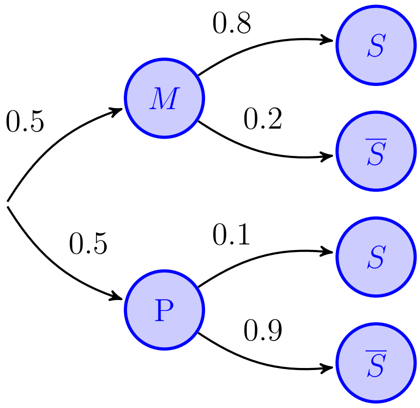
Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2019 - Opción B)

Solución.



a) Sean los sucesos:

$$
\begin{aligned}
M &\equiv \text{"El paciente toma el medicamento"} \\
P &\equiv \text{"El paciente toma el placebo"} \\
S &\equiv \text{"El paciente sana"}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(M \cap S) + P(P \cap S) \\
&= P(M) \cdot P(S \mid M) + P(P) \cdot P(S \cap P) \\
&= 0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.45
\end{aligned}
$$

b) $$
\begin{aligned}
P(M \cap S) &= \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M) \cdot P(S \mid M)}{P(S)} \\
&= \frac{0.5 \cdot 0.8}{0.45} = 0.889
\end{aligned}
$$