Matemáticas II
Exámenes resueltos
PAU y EVAU

JULIO 2018 - Extraordinario

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

23 de mayo de 2019

2018 Julio (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\alpha\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2\\37/2\\11\end{pmatrix}$, *se pide:*

a) Discutir el rango de la matriz A*, en función de los valores del parámetro* α*.*

b) Para $\alpha=0$*, calcular, si es posible* A^{-1}*.*

c) Resolver, si es posible, el sistema $AX=B$*, en el caso* $\alpha=1$*.*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Como $\begin{vmatrix}14&0\\0&7\end{vmatrix}\neq 0 \implies \text{ran}A\geq 2.$
$|A|=490\alpha-490=0 \implies \alpha=1.$
Por tanto:

- Si $\alpha=1 \implies \text{ran}A=2$
- Si $\alpha\neq 1 \implies \text{ran}A=3$

b) Para $\alpha=0$, $A=\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&0\end{pmatrix}$ y $|A|=-490$. Hallamos A^{-1} por adjuntos.

$$\text{Adj } A=\begin{pmatrix}-20&15&-21\\40&-30&-56\\-70&-70&98\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top}=-\frac{1}{490}\begin{pmatrix}-20&40&-70\\15&-30&-70\\-21&-56&98\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/49&-4/49&1/7\\-3/98&3/49&1/7\\3/70&4/35&-1/5\end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1}\cdot A=I$

c) Resolvemos el sistema para $\alpha = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim C_1 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 37/2 \\ 5 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 14 & -14 & 35 \\ 0 & 8 & --8 & 20 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 1/7F_2 \\ 1/4F_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \quad F_3 - F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} 10z + 14\lambda = 2 \\ 2y - 2\lambda = 5 \\ x = \lambda \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \lambda \\ y = 5/2 + \lambda \\ z = 1/5 - 7/5\lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & si\ x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) Calcular $\int_0^2 f(x)\,dx$.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Para estudiar la continuidad en el punto $x = 2$ tenemos que ver:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} 8e^{2x-4} = 8$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x}{x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 8$
- $f(2) = 8e^{2\cdot 2-4} = 8$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Asíntotas horizontales:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 8e^{2x-4} = \lim\limits_{x\to -\infty} 8e^{-2x-4} = \dfrac{8}{\infty} = 0 \Longrightarrow$ A. horiz. en $y = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3-4x}{x-2} = +\infty \Longrightarrow \nexists$ A. horizontal

Asíntotas verticales:

- Si $x \leq 2$ no hay asíntota vertical
- Si $x > 2$ la asíntota vertical estaría en $x - 2 = 0 \implies x = 2$, pero $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2} = 8 \neq \infty$, por tanto $\nexists$ A. Vertical.

c) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 8e^{2x-4}\,dx = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 2 \cdot e^{2x-4}\,dx = 4e^{2x-4}\Big]_0^2 = 4e^0 - 4e^{-4} = 4 - \frac{4}{e^4}$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

a) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.

a) Si $\overrightarrow{w_1} \perp \vec{u},\ \vec{v}$ entonces $\overrightarrow{w_1}$ es proporcional a $\vec{u} \times \vec{v}$

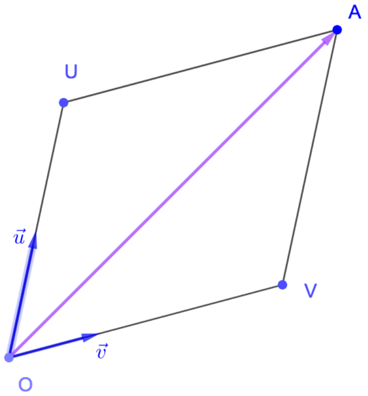
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4) \implies |\vec{w}| = \sqrt{45}$$

$$\implies \overrightarrow{w_1} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}} \right)$$

b) Si $\overrightarrow{w_2}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces $\overrightarrow{w_2} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$$\begin{gathered} \overrightarrow{w_2} \perp \vec{v} \implies \overrightarrow{w_2} \cdot \vec{v} = 0 \\ (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha \cdot (-2 + 0 - 3) + \beta \cdot (4 + 0 + 1) = 0 \\ -5\alpha + 5\beta = 0 \implies \alpha = \beta \end{gathered}$$

Tomando por ejemplo $\alpha = \beta = 1$ entonces $\overrightarrow{w_2} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} = (1, 2, 2)$



c) $a\vec{u}+b\vec{v}=\overrightarrow{OA} \Rightarrow (-a+2b, 2a, 3a-b)=(-4,4,7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=4 & \Rightarrow a=2 \\ -2+2b=-4 & \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

Luego $\overrightarrow{OU}=a\vec{u}=2\cdot(-1,2,3)=(-2,4,6)$
y $\overrightarrow{OV}=b\vec{v}=-1\cdot(2,0-1)=(-2,0,1)$
y los puntos serán:

$$O(0,0,0),\ U(-2,4,6),\ A(-4,4,7) \text{ y } V(-2,0,1)$$

———————— ∘ ————————

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

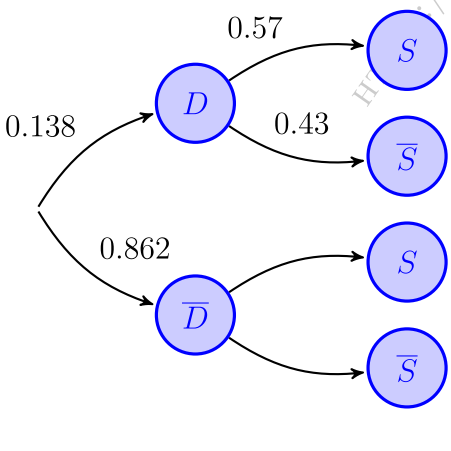
Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13.8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) *¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?*

b) *Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción A)

Solución.



a) Sean los sucesos:

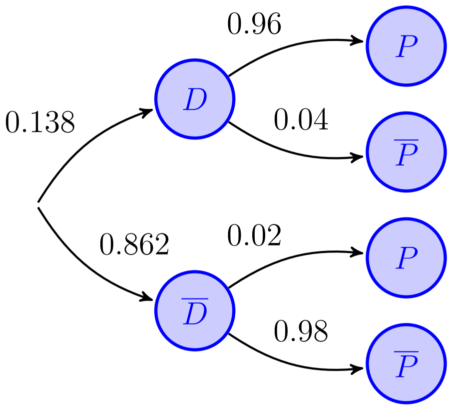
$D \equiv$ La persona tiene diabetes
$S \equiv$ La persona sabe que tiene diabetes

$$P(D\cap S)=P(D)\cdot P(S\mid D) = 0.138\cdot 0.57=0.0787$$

$$P(\overline{D}\cup\overline{S})=P(\overline{D\cap S})=1-P(D\cap S) = 1-0.0787=0.9213$$

b) Sean los sucesos:

$D \equiv$ La persona tiene diabetes
$S \equiv$ La persona sabe que tiene diabetes
$P \equiv$ El test da positivo



$$\begin{aligned} P(D \mid P) &= \frac{P(D \cap P)}{P(P)} \\ &= \frac{P(D) \cdot P(P \mid D)}{P(D \cap P) + P(\overline{D} \cap P)} \\ &= \frac{P(D) \cdot P(P \mid D)}{P(D) \cdot P(D \mid P)) + P(\overline{D})\dot{P}(P \mid \overline{D}))} \\ &= \frac{0.138 \cdot 0.96}{0.138 \cdot 0.96 + 0.862 \cdot 0.02} = 0.8848 \end{aligned}$$

2018 Julio (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2.5 *puntos*)

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución. Sean las incógnitas:

$$x \equiv \text{"Número de días de estancia en Francia"}$$
$$y \equiv \text{"Número de días de estancia en Alemania"}$$
$$z \equiv \text{"Número de días de estancia en Suiza"}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x=2z \\ x\cdot(20+20)+y\cdot(25+15)+z\cdot(30+25)+8\cdot 15=765 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=15 \\ x-2z=0 \\ 8x+8y+11z=129 \end{cases}$$

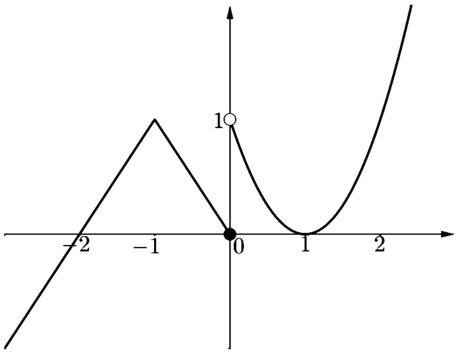
Resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & 11 & 129 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ F_3-8F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -1 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x+6+3=15 \\ -y-3\cdot 3=-15 \\ 3z=9 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=6 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2.5 *puntos*)

El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y = f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

c) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

d) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $f(-1) = 1 \qquad \& \qquad f'(1) = 0$

b) Continuidad en $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1 \\ \bullet f(-1) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = -1$$

Continuidad en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \\ \bullet \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \\ \bullet f(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 0$$

c) En $x = -1$ la función es continua pero tiene un pico, por lo que no es derivable. En $x = 0$ la función no es derivable porque no es continua.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1\ u^2$

Ejercicio 3 (2.5 *puntos*)

Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) *Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.*

b) *Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.*

c) *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P*

(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)

Solución.

a) $$P(0,-1,1) \quad \& \quad r \equiv \begin{cases} Q(1,0,1) \\ \vec{v}=(0,1,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(0,-1,1) \\ \overrightarrow{PQ}=(1,1,0) \\ \vec{v}=(0,1,2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \left[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \vec{v}\right]=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Longrightarrow 2x-2\cdot(y+1)+1\cdot(z-1)=0 \Longrightarrow \boxed{\pi \equiv 2x-2y+z-3=0}$$

b) $$S \in r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Longrightarrow S(1,\lambda,1+2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{SP}=(-1,-1-\lambda,-2\lambda)$$

$$\overrightarrow{SP}\perp r \Rightarrow \overrightarrow{SP}\perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{SP}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -1-\lambda-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{5} \Longrightarrow \boxed{S\left(1,-\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)}$$

c) $$T\in r \Longrightarrow T(1,\lambda,1+2\lambda) \quad \& \quad P(0,-1,1) \quad \& \quad \overrightarrow{PT}=(1,1+\lambda,2\lambda)$$

$$\begin{aligned} d(P,T) &= \sqrt{1^2+(1+\lambda)^2+(2\lambda)^2} \\ &= \sqrt{4\lambda^2+2\lambda+2}=\sqrt{5} \Longrightarrow 5\lambda^2+2\lambda-3=0 \Longrightarrow \lambda=\{-1,3/5\} \\ & T_1=(1,-1,-1) \quad \& \quad T_2=\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right) \\ & \overrightarrow{PT_1}=(1,0,-2) \quad \& \quad \overrightarrow{PT_2}=\left(1,\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Area}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}\right|=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\frac{16}{5},-\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=\frac{12}{5}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2.5 *puntos*)

> *La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:*
>
> *a) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0,05$.*
>
> *b) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y $9,3$.*
>
> *(Madrid - Matemáticas II - Julio 2018 - Opción B)*

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(8,5; 2,5)$

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a-8,5}{2,5}\right) = P\left(Z \geq -\frac{a-8,5}{2,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{-a+8,5}{2,5}\right) = 0,05$$
$$\Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{-a+8,5}{2,5}\right) = 0,95 \Longrightarrow \frac{-a+8,5}{2,5} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,38$$

b) $X : \mathcal{N}(8,5; 2,5)$

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 9,3) &= P\left(\frac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \frac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) \\ &= P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - [1 - P(Z \leq 0.2)] \\ &= 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048 \end{aligned}$$