Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

a) *Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.*

b) *Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.*

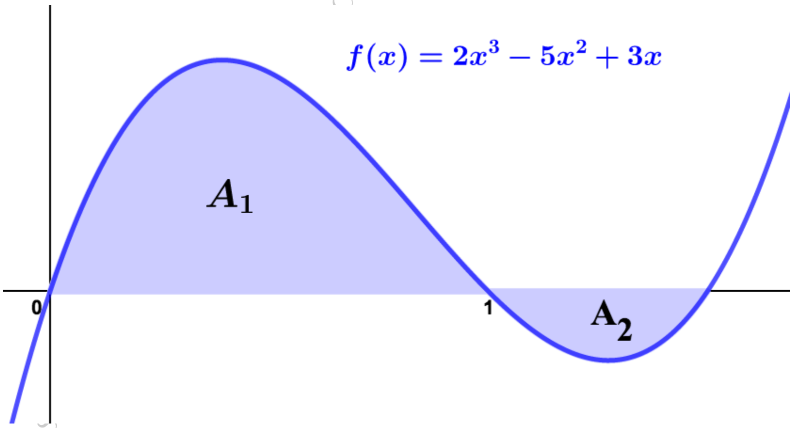
(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$2x^3-5x^2+3x = x\cdot(2x^2-5x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow x = \{1,\ ^3/_2\} \end{cases}$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$, $x = 1$ y $x = ^3/_2$, planteamos el área de manera que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0, 1)$ y A_2 en $(1, 3)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^{3/2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \left(\frac{81}{32} - \frac{135}{24} + \frac{27}{8}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{32} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{96}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}\ u^2$$

b) El punto de tangencia es
$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 0 = 3 \cdot (x - 0)$$
$$r \equiv y = 3x$$