Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} -x+ay+z & = & 3 \\ 2y+2z & = & 0 \\ x+3y+2z & = & -3 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a=0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} -x+\lambda = 3 \\ 2y+2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial, hacemos que los parámetros estén lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \; F_1 \leftrightarrow F_3 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \; C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & a & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} 1/2F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a+3 & 0 \end{array}\right) \sim \; F_3 - 3F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMPATIBLE DETERMINADO (como el sistema es homogéneo tiene solución trivial)
- Si $a = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$SIST. COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Sustituimos en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior el valor $a00$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow -x + \lambda = 3 \\ \Rightarrow y + \lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \qquad , \; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$