Ejercicio 2 (3 *puntos*)

Dadas las matrices:

$$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$.

c) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) El determinante de P es $|P|$ =-1 Hallamos 1P^{-1} por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } P=\begin{pmatrix}-2&-2&5\\-1&0&1\\2&1&-4\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\text{Adj } P^{\top}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-2&0&1\\5&1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&0&-1\\-5&-1&4\end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $P^{-1}\cdot P=I=P\cdot P^{-1}$

b) Sea la matriz $B=P^{-1}J^{-1}$, entonces:

$$B^{-1}=\left(J^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(P^{-1}\right)^{-1}=JP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&2&2\\2&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\6&4&4\\2&3&2\end{pmatrix}$$

c) $A=PJP^{-1}\implies A^2=PJ\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{I}JP^{-1}=PJ^2P^{-1}$

$$\left|A^2\right|=\left|PJ^2P^{-1}\right|=|P|\cdot\left|J^2\right|\cdot\left|P^{-1}\right|=\cancel{|P|}\cdot\left|J^2\right|\cdot\frac{1}{\cancel{|P|}}=|J|^2=(-1\cdot2\cdot1)^2=(-2)^2=4$$