Ejercicio 1 (3 *puntos*)

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$ *, se pide:*

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) Resolverlo en el caso $a = 2$.

(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \implies |A| = a^2 - 4 = 0 \implies a = \pm 2$$

- Si $a \neq \{-2, 2\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incógitas $= 3 \implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim F_2 - 2F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ 9F_3 - 4F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ 9y - 3 \cdot \frac{4}{3} = -1 \\ 3z = 4 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Resolvemos el sistema para $a = 2$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 4 \cdot \frac{\lambda}{2} + 3\lambda = 1 \\ 10y - 5\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial intentando que los parámetros se sitúen lo más a la derecha y abajo posible, posteriormente aplicamos el método de Gauss al sistema.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \sim 2F_2 - F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ (8+a)F_3 + 4F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 0 & -8-a & 2a+1 & 2-a \\ 0 & 0 & -a^2+4 & 8-4a \end{array}\right) \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \{-2, 2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado
- Si $a = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible
- Si $a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

b) Sustituimos el valor del parámetro $a = 1$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & -9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1 \\ \Rightarrow -9y + 3 \cdot \frac{4}{3} = 1 \\ \Rightarrow 3z = 4 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}}$$

c) Sustituimos el valor del parámetro $a = 2$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado a), teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.I. por lo que solo escribiremos las dos primeras filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{r} \Rightarrow 2x + 2 \cdot \frac{\lambda}{2} + \lambda = 2 \\ \Rightarrow -10y + 5\lambda = 0 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \quad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}$$

$$\xRightarrow{t=2\lambda} \boxed{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{array}}$$