**Ejercicio 1 (3 *puntos*)**

*Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+my+3z & = & 4 \\ x+y-2z & = & -2 \\ 3x+(m+1)z & = & m+2 \end{array}\right\}$$

a) *Discutirlo según los valores del parámetro real $m$.*

b) *Resolverlo para $m=-3$.*

c) *Para cierto valor de $m$, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y=0$. Determinar $x$ y $z$ para esa solución. ¿Cuál es el valor de $m$?*

*(Madrid - Matemáticas II - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)*

**Solución.**

Método de Rouché



a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes $A$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} |A| = m+1-6m+0-(9+m^2+m+0) \\ = -m^2-6m-8=0 \Longrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-4 \end{cases} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A)=3=\text{ran}(A^*)=\text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $m=-2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*)=2$

  $\text{ran}(A)=2=\text{ran}(A^*)\neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $m=-4 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)$

  $|A|=0 \Longrightarrow \text{ran}(A)<3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A)=2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A^*)=3$

  $\text{ran}(A)=2\neq\text{ran}(A^*)=3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $m=-3$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & -11 & -13 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ 4F_3 - 9F_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x - 3\cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 \\ 4y - 5\cdot 2 = -6 \\ z = 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}}$$

c) Dos formas de resolver este apartado.

I) <u>Método rápido.</u> Si $y=0$ el sistema nos queda:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3z & = & 4 \\ x-2z & = & -2 \\ 3x+(m+1)z & = & m+2 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_1-E_2} 5z=6 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=2/5 \\ y=0 \\ z=6/5 \end{array}}$$

Dependiendo de cómo estén los parámetros el sistema puede ser más difícil de resolver ya que no es un sistema lineal.

II) <u>Método general.</u> Nos dicen que el sistema es compatible. Vamos a suponer que se trata de un S.C.D. y, resolviéndolo por Cramer, obligaremos a que $y=0$.

$$|A| = -m^2-6m-8 = -(m+2)\cdot(m+4) \quad \& \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = -(m+2)$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\cancel{-(m+2)}}{\cancel{-(m+2)}\cdot(m+4)} = \frac{1}{m+4} = 0 \Longrightarrow 1 = 0 \Rightarrow \text{ Contradicción!}$$

La contradicción viene de haber supuesto que el sistema era compatible determinado y nos ha salido un valor del parámetro $m$ para el que el sistema es compatible indeterminado. Por tanto para que $y=0$ el sistema ha de ser compatible indeterminado, luego $m=-2$ y resolvemos el S.C.I., para lo cual escribimos tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow x - 2\cdot 0 + 3\cdot 6/5 = 4 \\ \Rightarrow 3y - 5\lambda = -6 \Rightarrow y = \frac{-6+5\lambda}{3} = 0 \Rightarrow \lambda = 6/5 \\ \Rightarrow z = \lambda \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=2/5 \\ y=0 \\ z=6/5 \end{array}}$$

## Método de Gauss

a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros queden lo más abajo y a la derecha posible. Posteriormente aplicamos el método de Gauss para obtener un sistema escalonado.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \sim F_1 \leftrightarrow F_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & m & 3 & 4 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & m+7 & m+8 \end{array}\right) \sim \quad (m-1)F_3 + 3F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & m-1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & m^2+6m+8 & m^2+7m+10 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} m^2+6m+8=0 \\ m=\{-2,-4\} \end{array}$$

- Si $m \neq \{-2,-4\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. DETERMINADO
- Si $m = -2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ SIST. COMP. INDETERMINADO
- Si $m = -4 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBLE

b) Resolvemos para el valor de $m = -3$, para lo cual sustituimos el parámetro en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior y resolvemos, teniendo en cuenta de que se trata de un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x+1-2\cdot 2=-2 \\ \Rightarrow -4y+5\cdot 2=6 \\ \Rightarrow -z=-2 \end{array} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}}$$

c) La resolución de este apartado es la misma que la planteada en la sección de MÉTODO DE ROUCHÉ. Nos remitimos a ella