Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos
SEPTIEMBRE 2017 (Coincidentes)

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

4 de julio de 2018

Septiembre 2017 (Coincidentes)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = I$, siendo I la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = a^3 - 2a^2 = 0 \implies a^2 \cdot (a-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$$

- Si $a \neq \{0, 2\} \implies \exists\, A^{-1}$
- Si $a = \{0, 2\} \implies \nexists\, A^{-1}$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= I \\ \underbrace{A^{-1}A}_{I} X &= A^{-1}I \\ X &= A^{-1} \end{aligned}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \leq 16;\ x + y \leq 11;\ x + 2y \geq 6;\ x \geq 0;\ y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S?

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ en la región S indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución.

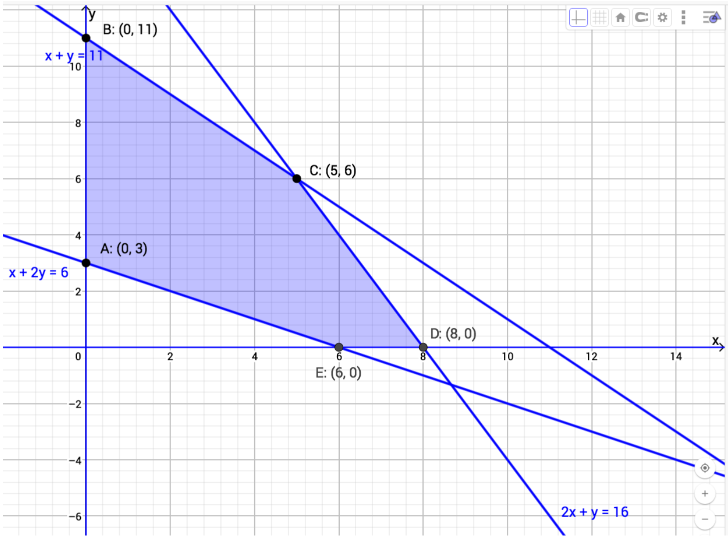
- `Función objetivo:`

$$f(x, y) = 3x + y$$

- `Región S:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} 2x + y \leq 16 & \rightarrow (0, 16) \quad \& \quad (8, 0) \\ x + y \leq 11 & \rightarrow (0, 11) \quad \& \quad (11, 0) \\ x + 2y \geq 6 & \rightarrow (0, 3) \quad \& \quad (6, 0) \\ x,\ y \geq 0 \end{cases}$$

- **Región factible:** Representamos S y calculamos los vértices de la misma. $(4,4) \in S$ ya que cumple todas las restricciones.



- **Optimización de la fución objetivo:**

Punto	x	y	f(x,y)
A	0	3	3
B	0	11	11
C	5	6	21
D	8	0	24
E	6	0	18

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $D(8,0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $A(0,3)$ y vale 3.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & si \quad x < -1 \\ x & si \quad -1 \leq x < 1 \\ -x^2 + 2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) *Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.*

b) *Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.*

Solución.

a)
- Si $x \neq \{-1, 1\}$, $f(x)$ es continua por ser polinomios.
- Si $x = -1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 - 2x\right) = 3$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x = -1$
  - $f(-1) = -1$

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de salto finito.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$

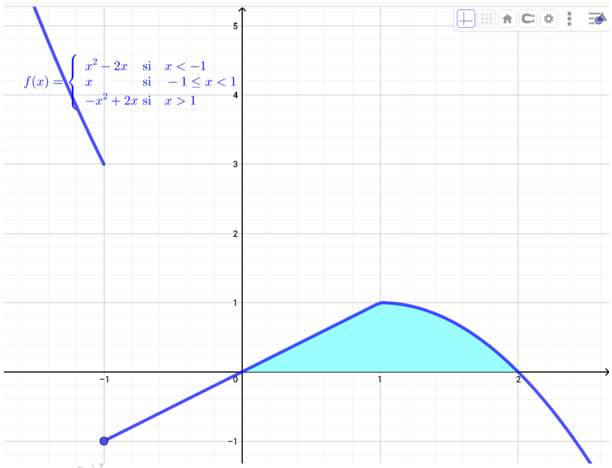
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(-x^2+2x\right) = 1$
- $f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \implies f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Por tanto $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

$-1 \le x < 1 \Rightarrow x = 0$
$x \ge 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = x(-x+2) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = 0$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(0,1)$ y A_2 en $(1,2)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}\right) - (0) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (-x^2+2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

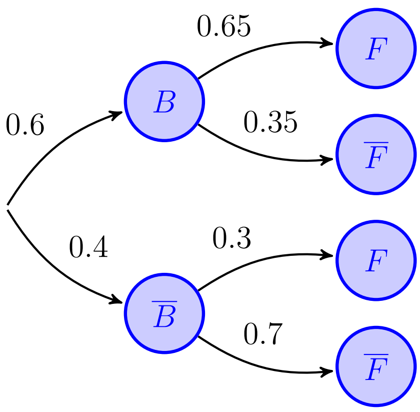
a) *Reciba clases de flamenco.*

b) *Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco*

Solución.

Sean los sucesos

$B =$ El alumno recibe clases de ballet
$F =$ El alumno recibe clases de flamenco



a) $P(F) = P(B \cap F) + P(\overline{B} \cap F)$
$$= P(B) \cdot P(F \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(F \mid \overline{B})$$
$$= 0.6 \cdot 0.65 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.51$$

b) $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{1 - P(F)}$
$$= \frac{0.6 \cdot 0.35}{1 - 0.51} = 0.429$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. estos precios son los siguientes:

140; 125; 140; 175; 135; 165; 175; 110; 150; 130.

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 15) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} = \frac{140+125+140+175+135+165+175+110+150+130}{10} = 144.5$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$
$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{8} = 9.3$$
$$I.C. = \overline{X} \pm \varepsilon = 144.5 \pm 9.3 = (135.2, 153.7)$$

b) $n = ? \qquad \varepsilon \leq 8 \qquad 1 - \alpha = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$

$$\varepsilon \leq 8 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right)^2 13.5$$
$$\implies \boxed{n = 14}$$

Septiembre 2017 (Coincidentes)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcr} -x+ay+z & = & 3 \\ 2y+2z & = & 0 \\ x+3y+2z & = & -3 \end{array}\right\}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

1) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = 2a = 0 \implies a = 0$$

- Si $a \neq 0$ $\quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 0 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss. Como hemos visto en la discusión que si $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado vamos a escribir tan solo las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero que hemos encontrado pues tenemos la seguridad de que son linealmente independientes.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \begin{array}{r} -x+\lambda = 3 \\ 2y+2\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3+\lambda \\ y = -\lambda \qquad , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \left(3x^2 - 2x\right)^2$$

a) *Calcúlese* $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

b) *Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de* $f(x)$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

Solución.

a) Desarrollamos el cuadrado: $f(x) = (3x^2 - 2x)^2 = 9x^4 + 4x^2 - 12x^3$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(9x^4 + 4x^2 - 12x^3\right) dx = \frac{9}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 3x^4\Big]_{-1}^{1} = \left(\frac{9}{5} + \frac{4}{3} - 3\right)$$
$$- \left(-\frac{9}{5} - \frac{4}{3} - 3\right) = \frac{2}{15} + \frac{92}{15} = \frac{94}{15}$$

b) El punto de tangencia es $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = f(2) = \left(3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2\right)^2 = 64$

$$f'(x) = 36x^3 + 8x - 36x^2$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(2) = 160$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 64 = 160 \cdot (x - 2)$$
$$r \equiv y = 160x - 256$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

, donde x *representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.*

a) *¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?*

b) *¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?*

Observación: *valores negativos de* $b(x)$ *implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias.*

Solución.

a) Para que no haya ganancias ni pérdidas el beneficio ha de ser cero:

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \implies x = \frac{-120 \pm 40}{-2} = \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$$

b) Para obtener el máximo de la función beneficio:

$$b'(x) = -2x + 120 = 0 \implies x = 60$$
$$b''(x) = -2$$
$$b''(60) = -2 < 0 \implies (\cap) \implies \text{Máximo}$$

Luego fabricando 60 metros de cable obtendremos un beneficio máximo igual a $b(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$ euros.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.5$, $P(A \mid B) = 0.375$ y $P(B \cap A) = 0.3$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Ocurra B.

b) Ocurra B pero no A.

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.3}{P(B)} = 0.375 \implies P(B) = \dfrac{0.3}{0.375} = 0.8$

b) $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$

Solución.

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros ($l/100\,km$), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2\ l/100\,km$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4.528, 5.2)$ para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 4.8\ l/100\,km$. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre 4.5 y 5.1 $l/100\,km$.

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 1.2) \xrightarrow{n=49} \overline{X} :$

$$2\varepsilon = 5.2 - 4.528 = 0.672 = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies z_{\alpha/2} = \frac{0.672 \cdot \sqrt{49}}{2 \cdot 1.2} = 1.96 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

b) $X: \mathcal{N}(4.8, 1.2) \xrightarrow{n=49} \overline{X}: \mathcal{N}(4.8, {}^{1.2}/\sqrt{49} = 0.1714)$

$$\begin{aligned} P(4.5 \leq \overline{X} \leq 5.1) &= P\left(\frac{4.5-4.8}{0.1714} \leq Z \leq \frac{5.1-4.8}{0.1714}\right) = P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \geq 1.75) \\ &= P(Z \leq 1.75) - [1 - P(Z \leq 1.75)] = -0.9599 - (1 - 0.9599) \\ &= 0.9198 \end{aligned}$$