Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 99 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 3) \quad \xrightarrow{n=9} \quad \overline{X} = \frac{37+40+42+39+41+40+39+42+40}{9} = 40$$

$$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1-\alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{9}} = 1.96 \implies I.C. = \overline{X} \pm \varepsilon = (38.04, 41.96)$$

b) Hallar el mínimo n de tal forma que $\varepsilon \leq 1$, siendo $1-\alpha = 0.99$

$$1-\alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies \alpha/2 = 0.005 \implies 1-\alpha/2 = 0.995 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$\varepsilon < 1 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies 2.325 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 1 \implies n \geq \left(2.325 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 = 48.65$$

y por tanto $\boxed{n = 49}$