Ejercicio 3 (2 *puntos*)

El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidas al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

a) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.

b) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a)
- $f(0) = -12$ que significa que si no producimos ninguna tonelada de cemento tendremos unas pérdidas de 12000 €.
- $f(8) = -28$ que se interpreta como que si producimos 8 toneladas de cemento tendremos unas pérdidas de 28000 € debido a las ineficiencias de la sobreproducción (contratación de horas extraordinarias, problemas logísticos de almacenaje...).

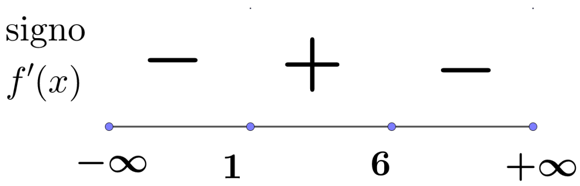
Para calcular el máximo beneficio tenemos que optimizar la función $f(x)$. Para ello hallaremos los puntos singulares de la misma y hallaremos el máximo, comprobando posteriormente que éste no sea menor que los extremos de la función $f(0)$ y $f(8)$.

$$f'(x) = -4x + 14 = 0 \implies x = 7/2.$$
$$f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \left(\bigcap\right) \Rightarrow \text{Máximo.}$$

El máximo beneficio es de $f(7/2) = 12500$ € que se obtiene con una producción de 3.5 toneladas de cemento.

b) Establecer entre qué valores debe estar la producción de cemento para que la empresa no tenga pérdidas es tanto como estudiar el signo de la función $f(x)$.

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12 = 0 \implies x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-14 \pm 10}{-4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$



Luego la producción de cemento deberá estar entre $[1, 6]$ toneladas para que la empresa no tenga pérdidas.