

Ejercicio 2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x}$.

- Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- Determinense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Modelo 2018 - Opción B)

Solución.

a) ■ $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

■ A. Horizontal $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 3}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \pm\infty \Rightarrow \text{A.H.}$

■ A. Oblícuas Haciendo la división $\frac{3x^2+3}{x}$ obtenemos la A. Oblícuas $y = 3x$. También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3}{x} - 3x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3 - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$

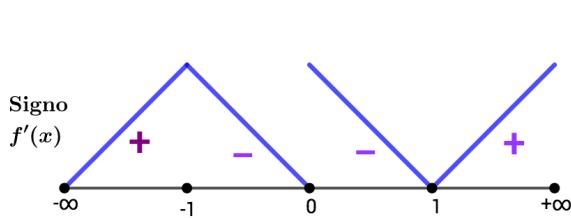
■ A. Vertical $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - (3x^2 + 3) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2 - 3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar $f'(x) = \frac{3(x+1)(x-1)}{x^2}$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 0) \cup (0, 1)$ y tiene un *máximo* en $(-1, -6)$ y un *mínimo* en $(1, 6)$

