

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{rcl} x + ay + z & = & 1 \\ ax + y + (a-1)z & = & a \\ x + y + z & = & a+1 \end{array} \right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 3$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 1 + a + a(a-1) - (1 + a^2 + a - 1) = -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

▪ Si $a \neq 1$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A = 3 = \text{ran} A^* = \text{n}^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SIST. COMP. DET.}$

▪ Si $a = 1$ $\Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran} A < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran} A^* = 3$$

$$\text{ran} A = 2 \neq \text{ran} A^* = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} x + 3 \cdot (-3/2) + 12 = 1 \\ \Rightarrow -8 \cdot (-3/2) - z = 0 \\ \quad -2y = 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}$$

MÉTODO DE GAUSS

- a) Escribimos el sistema en forma matricial, situamos los parámetros lo más a la derecha y abajo posible y aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 - aF_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a \end{array} \right) \\
 &\sim C_2 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \end{array} \right) \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1
 \end{aligned}$$

- Si $a \neq 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & \square \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE DETERMINADO}$
- Si $a = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$

- b) Sustituimos el valor $a = 3$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 12 + 3 \cdot (-3/2) = 1 \\ -z - 8 \cdot (-3/2) = 0 \\ -2y = 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -13/2 \\ z = 12 \\ y = -3/2 \end{array}}$$

————— ○ —————